

LASERPHYSIK

OPTIK.TEX KB 20070224

KLAUS BETZLER¹

FACHBEREICH PHYSIK, UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

B: OPTIK

Grundlegende Konzepte und Phänomene der Optik sollen hier in kompakter Form wiederholt werden.

1 Geschichtliches

Eine *Kurze Geschichte der Optik* finden Sie unter

<http://members.aol.com/WSRNet/D1/hist.htm> .

Und falls Sie sich für die handelnden Personen interessieren:

<http://www.uni-ulm.de/elektronenmikroskopie/mattem/teaching/optik-geschichte.html> .

(Kopien jeweils auch in Stud.IP).

¹KLAUS.BETZLER@UNI-OSNABRUECK.DE

2 Geometrische Optik

Begründung für die *Geometrische Optik* ist unsere Alltagserfahrung. Lichtstrahlen, Schatten, Reflexion sind offensichtlich damit zu beschreiben. Während beim Schall sofort eine Beschreibung im Wellenbild evident ist, scheint beim Licht die *Strahlenoptik* zu funktionieren. Wenn Sie sich hinter einem dicken Baum verstecken, kann man Sie in der Regel noch hören aber nicht mehr sehen. Die folgenden Abschnitte 2.1 und 2.2 deuten jedoch schon auf die Nützlichkeit anderer Betrachtungsweisen hin.

2.1 Lichtgeschwindigkeit

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist seit 1983 als Naturkonstante festgelegt² zu

$$c_0 = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (1)$$

Näheres zur Geschichte und zur Messung finden Sie beispielsweise unter

<http://de.wikipedia.org/wiki/Lichtgeschwindigkeit> .

Aus den Maxwell-Gleichungen folgt, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit über die Permittivität und Permeabilität des Vakuums, ε_0 und μ_0 , definiert wird zu

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} . \quad (2)$$

Da μ_0 festgelegt ist ($4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$), ist damit auch ε_0 definiert.

2.2 Brechungsindex

In Materie ist die Gleichung 2 zu modifizieren, die materialspezifischen Größen sind einzusetzen:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} . \quad (3)$$

In Materie ist damit die Lichtgeschwindigkeit c kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 – um einen Faktor n , den Brechungsindex. n ist frequenzabhängig (*Dispersion*), nimmt im Allgemeinen mit der Frequenz zu (*normale Dispersion*).

Sowohl ε wie auch μ sind Materialtensoren, Tensoren zweiter Stufe, die die Eigenschaften des Materials beschreiben. Auf Hauptachsen transformiert, enthalten sie jeweils drei unabhängige Komponenten (Diagonalele-

²Wegen ihrer historischen Bedeutung wird sie natürlich im physikalischen Praktikum immer noch gemessen. Man sollte sich jedoch klar machen, dass man eigentlich das Meter-Normal bestimmt und nicht die Lichtgeschwindigkeit.

mente). n ist daher im allgemeinen Fall richtungs- und polarisationsabhängig (*Doppelbrechung*). Die Materialtensoren sind invariant gegenüber den Symmetrieoperationen des Materials, in geeigneten Symmetrien können somit zwei der Komponenten gleich sein (*uniaxial*) oder auch alle drei (*isotrop*). Andererseits kann die Symmetrie auch durch zusätzliche äußere Einflüsse erniedrigt werden (Druck, Felder). Das wirkt sich dann ebenfalls auf die Doppelbrechung aus.

2.3 Fermatsches Prinzip

Das wichtige Extremalprinzip der geometrischen Optik: Ein Lichtstrahl verläuft zwischen zwei Punkten A und B auf einer extremalen Bahn, in der Regel auf der (zeitlich) kürzest möglichen. Eine kleine Variation der Bahn verändert den Lichtweg nicht. Im Vakuum oder in einem homogenen Medium bedeutet das, dass

$$\delta S = 0 \quad \text{für} \quad S = \int_A^B ds. \quad (4)$$

Dies entspricht anderen, sonst aus der Physik bekannten Extremalprinzipien (z. B. Hamiltonsches Prinzip).

Bei optisch inhomogenen Medien müssen wir anstelle des geometrischen Wegs ds die durch den Brechungsindex n modifizierte *optische* Weglänge $n(s)ds$ einsetzen.

Reflexion: Als einfaches Beispiel sehen wir uns die Reflexion an. Abbildung 1 definiert die Geometrie.

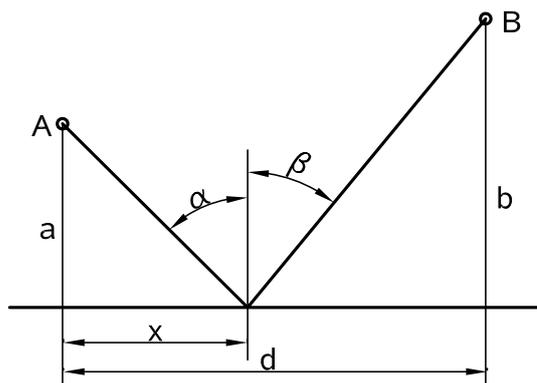


Abbildung 1: Reflexion: Einfallswinkel α , Reflexionswinkel β .

Der Lichtweg von A nach B ist

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}, \quad (5)$$

die Variation bezüglich x muss verschwinden

$$\delta \overline{AB} = \frac{\partial \overline{AB}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \stackrel{!}{=} 0, \quad (6)$$

woraus $\sin \alpha = \sin \beta$ oder $\alpha = \beta$ folgt.

Snelliussches Brechungsgesetz: Als weiteres Beispiel die Brechung an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 . Die Geometrie ist in Abbildung 2 definiert.

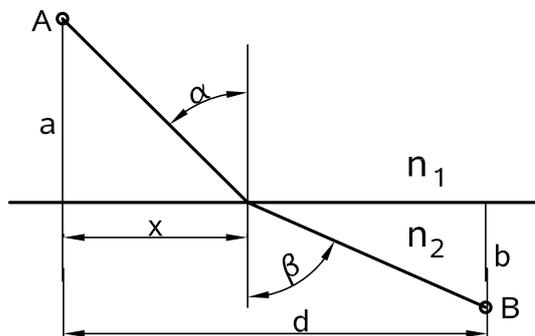


Abbildung 2: Lichtbrechung an der Grenzfläche zweier Materialien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 .

Der optische Lichtweg von A nach B ist – nun durch die Brechungsindizes modifiziert –

$$\overline{AB} = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}, \quad (7)$$

wieder muss die Variation bezüglich x verschwinden

$$\delta \overline{AB} = \frac{\partial \overline{AB}}{\partial x} = n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - n_2 \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \stackrel{!}{=} 0, \quad (8)$$

woraus $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ folgt, das **Snelliussche Brechungsgesetz**.

Totalreflexion: Für einen reellen Winkel β muss $\sin \beta \leq 1$ gelten. Ist das nicht der Fall, wird das Licht an der Grenzfläche³ komplett reflektiert (Totalreflexion). Für $\sin \beta = 1$ berechnet sich der *Grenzwinkel* für Totalreflexion zu $\alpha_T = \arcsin(n_2/n_1)$. Für $\alpha > \alpha_T$ wird das Licht totalreflektiert. Lösungen für α_T gibt es wiederum nur, wenn $n_1 > n_2$, das heißt beim Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium. Im umgekehrten Fall tritt keine Totalreflexion auf.

Anwendungen der Totalreflexion:

- Prismen (Strahlumlenkung, Bildumkehr, Polarisatoren),
- Rückstrahler (*Katzenauge*),

³Da das Licht (im Wellenbild) geringfügig in den verbotenen Bereich eindringt, erfolgt die Reflexion genau genommen nicht exakt an der Grenzfläche, sondern ein wenig dahinter (Stichwort: *Goos-Hänchen-Effekt*).

- Wellenleiter, Glasfasern.

Dispersion: Die Brechungsindizes sind frequenzabhängig, damit wird auch der Winkel β frequenzabhängig. Man nutzt dies aus bei der spektralen Zerlegung von Licht durch Prismen (Stichworte: *Prismenspektroskop*, *Minimallenkung*).

2.4 Matrixformulierung der geometrischen Optik

Wenn wir ein rotationssymmetrisches optisches System (Linse, Hohlspiegel, Brechungsindexänderung) betrachten, können wir einen *Lichtstrahl* darin durch seinen Abstand r zur Rotationsachse, der *optischen Achse*, und durch seine Neigung φ zur *optischen Achse* beschreiben. Statt des Winkels können wir auch dessen Tangens $\tan \varphi = dr/dz = r'$ verwenden (z = Richtung der optischen Achse). An einer bestimmten Stelle z_1 des Systems ist der Lichtstrahl mithin durch einen Vektor mit den Komponenten r_1 und r'_1 festgelegt. An Ort z_2 werden sich im Allgemeinen beide Komponenten geändert haben, der Zusammenhang mit r_1 und r'_1 ist in erster Näherung linear – nur diesen Fall wollen wir diskutieren –

$$r_2 = A r_1 + B r'_1 \quad (9)$$

$$r'_2 = C r_1 + D r'_1 \quad (10)$$

mit den konstanten Faktoren A , B , C und D . Die Linearisierung mit konstanten Faktoren ist immer dann zulässig, wenn r und r' klein genug⁴ sind (achsennahe Strahlen).

Die Gleichungen 9 und 10 lassen sich in Matrixschreibweise zusammenfassen

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Zunächst überlegen wir uns die Matrizen für drei einfache Fälle, freie Ausbreitung, Reflexion an einer Kugelfläche, Brechung an einer Kugelfläche.

Freie Ausbreitung: An der Stelle z_1 ist der Lichtstrahl durch (r_1, r'_1) , bei z_2 durch (r_2, r'_2) beschrieben (Geometrie in Abbildung 3).

Mit der Wegstrecke L wird

$$r_2 = r_1 + L r'_1 \quad (12)$$

$$r'_2 = r'_1 \quad (13)$$

⁴Was *klein genug* quantitativ bedeutet, hängt davon ab, welche Ansprüche wir an die Genauigkeit dieser Beschreibung stellen.

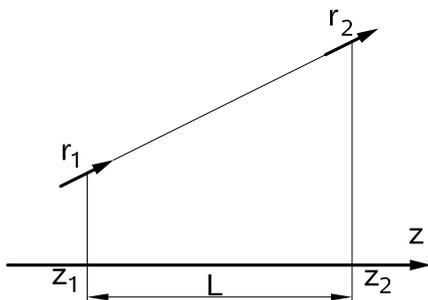


Abbildung 3: Geometrie für die freie Ausbreitung von Lichtstrahlen: der Vektor r_1 beschreibt den Lichtstrahl am Ort z_1 , der Vektor r_2 bei z_2 .

bzw. die ABCD-Matrix M für die freie Ausbreitung

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Reflexion an einer Kugelfläche: Für die Reflexion gilt: Reflexionswinkel gleich Einfallswinkel.

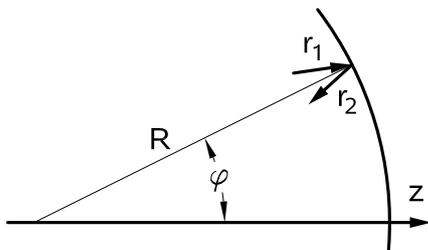


Abbildung 4: Geometrie für die Reflexion an einer Kugelfläche (Radius R): der einfallende Lichtstrahl wird durch den Vektor r_1 , der reflektierte durch r_2 beschrieben.

Umgesetzt auf die Geometrie der Abbildung 4 bedeutet das

$$r_2 = r_1 \quad (15)$$

$$-r'_2 - \varphi = \varphi - r'_1 \quad \text{oder} \quad (16)$$

$$r'_2 = -2\varphi + r'_1. \quad (17)$$

Bei der Reflexion wird formal der Strahlengang (z -Richtung) umgeklappt, dadurch das negative Vorzeichen bei r'_2 .

Mit $\varphi = r_1/R$ wird die Matrix M für die Reflexion an einer Kugelfläche

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Bei dieser Beschreibung ist R positiv, wenn der Krümmungsmittelpunkt links liegt, negativ, wenn er rechts liegt⁵.

Brechung an einer Kugelfläche: Anwendung des Snelliusschen Brechungsgesetzes für die Geometrie der Abbildung 5:

⁵Man sollte sich nicht darauf verlassen, dass diese Vorzeichenkonvention in der Literatur einheitlich verwendet wird.

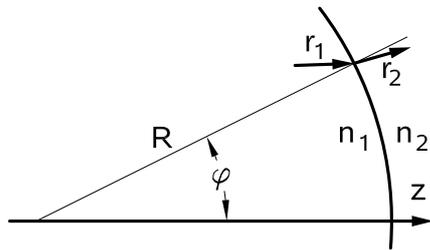


Abbildung 5: Geometrie für die Brechung an einer Kugelfläche (Radius R): der einfallende Lichtstrahl im Medium mit dem Brechungsindex n_1 wird durch den Vektor r_1 , der gebrochene im Material mit n_2 durch r_2 beschrieben.

$$r_2 = r_1 \quad (19)$$

$$n_2(\varphi - r'_2) = n_1(\varphi - r'_1) \quad \text{oder} \quad (20)$$

$$r'_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} r_1 + \frac{n_1}{n_2} r'_1. \quad (21)$$

Damit wird die Matrix M für die Brechung an einer Kugelfläche⁶

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Wir sollten uns nochmals einige Einschränkungen und Konventionen für die beschriebene Matrixformulierung klar machen:

- Strikte Gültigkeit der *Geometrischen Optik*.
- Anwendung für rotationssymmetrische Systeme.
- Lineare Näherung: achsennahe Strahlen, geringe Neigung gegen die optische Achse, Sinus oder Tangens kann immer durch den Winkel ersetzt werden.
- Winkel (Steigung) ist positiv für Strahlen, die sich von der optischen Achse wegbewegen, ansonsten negativ.
- Einheitliche Vorzeichendefinition für die Radien von gekrümmten Flächen ist einzuhalten.

Hintereinanderschaltung von Komponenten: Werden mehrere optische Komponenten kombiniert, die durch die Matrizen M_i beschrieben werden, wird

$$\begin{aligned} r_2 &= M_1 r_1 \\ r_3 &= M_2 r_2 \\ &\vdots \\ r_n &= M_{n-1} r_{n-1} \end{aligned} \quad (23)$$

⁶In der Literatur finden Sie diese Matrix teilweise auch mit ' $n_1 - n_2$ ' statt ' $n_2 - n_1$ ' (Vorzeichenkonvention für R).

und in einem Ausdruck zusammengefasst

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{M}_{n-1} \dots (\mathbf{M}_2 (\mathbf{M}_1 \mathbf{r}_1)) . \quad (24)$$

Freundlicherweise gilt für Matrixprodukte das Assoziativgesetz, mithin können wir auch anders zusammenfassen

$$\mathbf{r}_n = (\mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1) \mathbf{r}_1 = \mathbf{M} \mathbf{r}_1 . \quad (25)$$

Eine Folge von Einzelementen lässt sich somit durch eine Matrix beschreiben, die sich als Produkt der Einzelmatrizen berechnet. Die Produktbildung ist assoziativ (man darf also bei der Berechnung geschickt zusammenfassen), nicht aber kommutativ (die richtige Reihenfolge ist einzuhalten, Matrizen dürfen nicht vertauscht werden).

Beispiel Linse: Wie in Abbildung 6 dargestellt, kann eine Linse durch eine Abfolge aus drei elementaren Objekten beschrieben werden – Brechung an einer Kugelfläche mit Radius R_1 , freie Ausbreitung über die Strecke d , Brechung an einer Kugelfläche mit Radius R_2 . Der Brechungsindex im Linsenmaterial sei n , außerhalb 1.

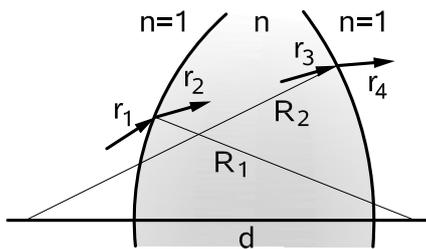


Abbildung 6: Linse als Folge aus gekrümmter Eintrittsfläche ($r_1 \rightarrow r_2$), freier Ausbreitung ($r_2 \rightarrow r_3$) und gekrümmter Austrittsfläche ($r_3 \rightarrow r_4$).

Die Transfermatrix für die Linse ist das Produkt aus den zu den einzelnen Objekten gehörenden Elementarmatrizen (Gl. 22 und 14)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{n R_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} . \quad (26)$$

Damit haben wir eine allgemeine Linse beschrieben. Die Berechnung vereinfacht sich deutlich, wenn wir als zusätzliche Näherung annehmen, dass die Linse *dünn* ist, wir also $d = 0$ setzen können. Dann ergibt sich

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) & 1 \end{pmatrix} . \quad (27)$$

Üblich ist es, die Abkürzung

$$D = -(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (28)$$

zu verwenden. Damit vereinfacht sich die Matrixbeschreibung für die dünne Linse weiter

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Strahlenbündel: Bei der Beschreibung durch Matrizen braucht man sich nicht auf einzelne Lichtstrahlen zu beschränken, durch geeignete Parametrisierung kann man auch ganze Ensembles von Strahlen mit bestimmten Eigenschaften betrachten. So ist ein Strahlenbündel, das von einer Punktlichtquelle auf der z -Achse stammt, im Abstand g von der Quelle gegeben durch

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

mit einer bestimmten Wertemenge α .

Ein achsenparalleles Bündel könnte durch

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

beschrieben werden, ein zur optischen Achse geneigtes Parallelbündel durch

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

mit α als Parameter und festem r'_1 .

Ein Strahlenbündel von einer Punktquelle, die von der optischen Achse den Abstand G hat, würde beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Brennweite einer Linse: Ein achsenparalleles Strahlenbündel trifft auf eine Linse. Gibt es einen Punkt, aus Symmetriegründen auf der optischen Achse, durch den alle Strahlen gehen? Den würden wir dann als Brennpunkt bezeichnen, die zugehörige Entfernung als Brennweite.

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(1-fD) \\ -\alpha D \end{pmatrix} \quad (34)$$

Offensichtlich ist r_2 dann für alle α identisch, wenn $f = 1/D$ ist. f ist die *Brennweite*, D die *Brechkraft* der Linse. Die letztere wird in *Dioptrien*, reziproken Metern, gemessen, daher oft auch als *Dioptrienzahl* bezeichnet.

Abbildung durch eine Linse: Wo wird das von einer Punktquelle ausgehende Strahlenbündel wieder zu einem Punkt, dem Bildpunkt?

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} g + b - gbD \\ -gD + 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

r_2 wird unabhängig von α für $g + b - gbD = 0$, mit $D = 1/f$ wird daraus die *Linsenformel*

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (36)$$

Hohlspiegel: Durch entsprechende Überlegungen lassen sich Brennweite und Abbildung beim Hohlspiegel herleiten

$$f = R/2, \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (37)$$

Verallgemeinerungen: Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich in diverse Richtungen verallgemeinern:

- Geneigte Parallelbündel: Statt des Brennpunktes wird die Brennebene definiert.
- Punktquelle im Abstand G von der optischen Achse: Bildebene statt Bildpunkt und zusätzlich Bildgröße B als Funktion der Gegenstandsgröße G .
- Negative Brennweite und negative Bildweite bei Zerstreuungslinsen.
- Dicke Linsen.
- Linsenkombinationen, kein Abstand zwischen den Linsen: Brechkraft additiv.
- Linsenkombinationen mit Abstand: Strahlaufweitung, Teleskop u. ä.

3 Wellenoptik

Phänomene wie Beugung und Interferenz sind im Rahmen der geometrischen Optik nicht erklärbar. Erweiterungen sind nötig. Früh formuliert wurde das Huygenssche Prinzip (1678) der überall entstehenden sekundären Elementarwellen. Young, Fresnel, Fraunhofer, Kirchhoff trugen im frühen 19. Jahrhundert zur Wellentheorie bei, richtig los ging's dann mit der Formulierung der Maxwell-Gleichungen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts.

3.1 Grundlagen

Basis zur Beschreibung von elektromagnetischen Phänomenen sind die Maxwell-Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , and \mathbf{H} :

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \quad (38)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (39)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (40)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (41)$$

mit ρ als Ladungsdichte und \mathbf{j} als Stromdichte.

\mathbf{D} und \mathbf{E} bzw. \mathbf{B} und \mathbf{H} hängen über Materialparameter zusammen

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} . \quad (42)$$

ϵ_0 und μ_0 sind die Permittivität⁷ und die Permeabilität⁸ des Vakuums, beide als Konstanten definiert, ϵ und μ die zugehörigen materialspezifischen relativen Größen. ϵ und μ sind im allgemeinen Fall Tensoren zweiter Stufe; dies bedeutet unter anderem, dass \mathbf{D} und \mathbf{E} bzw. \mathbf{B} und \mathbf{H} nicht parallel zueinander sind.

Die Maxwell-Gleichungen sind linear in \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , and \mathbf{H} ; das bedeutet, dass für alle Felder das Superpositionsprinzip gilt. Felder überlagern sich ungestört

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 . \quad (43)$$

Um das Arbeiten mit den Maxwell-Gleichungen zu erleichtern, werden meist geeignete Vereinfachungen definiert, beispielsweise

⁷Auch als Dielektrizitätskonstante oder Influenzkonstante,

⁸auch als Induktionskonstante bezeichnet.

- ◇ $\mu = 1$ für nichtmagnetische Materialien,
- ◇ $j = 0$ für Isolatoren,
- ◇ $\rho = 0$ ohne elektrische Ladungen,
- ◇ $\epsilon = 1, \mu = 1$ im Vakuum,
- ◇ $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ für rein statische Felder.

Für Anwendungen in der Optik kann man meist davon ausgehen, dass die ersten drei der genannten Vereinfachungen anwendbar sind, oft auch die vierte.

Damit ergibt sich aus den Maxwell-Gleichungen die *Wellengleichung* im Vakuum⁹

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (44)$$

mit $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c_0^2$, $c_0 =$ Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Machen wir noch die Näherung monochromatischer Wellen mit harmonischem Zeitverhalten, setzen also

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) , \quad (45)$$

erhalten wir die *Helmholtz-Gleichung*, die keine Zeitabhängigkeit mehr enthält

$$\left(\nabla^2 + \mathbf{k}^2 \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (46)$$

mit $\omega^2 = c_0^2 \mathbf{k}^2$.

3.2 Ebene Wellen

Charakteristische Lösungen der Helmholtz-Gleichung mit festem \mathbf{k} . Offensichtlich, wenn ∇^2 in kartesischen Koordinaten betrachtet wird.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathbf{k}^2 \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (47)$$

hat quasi-eindimensionale Lösungen der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) . \quad (48)$$

Die Feldamplitude E_0 ist konstant, der *Polarisationsvektor* \mathbf{e} steht senkrecht auf dem *Ausbreitungsvektor* \mathbf{k} . Letzteres ergibt sich aus den Maxwell-Gleichungen, nicht aus der Helmholtz-Gleichung.

⁹Herleitung beispielsweise in Kallenrode: *Rechenmethoden der Physik*.

3.3 Huygenssches Prinzip

Die *reale* Optik kann mit ebenen Wellen nicht viel anfangen. Überlegen Sie, warum.

Wir erinnern uns an eine alternative Beschreibungsweise, das Huygenssche Prinzip. Wikipedia meint dazu:

Das Huygenssche Prinzip (nach Christiaan Huygens), auch Huygens-Fresnel'sches Prinzip genannt, besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen Welle, der sogenannten Elementarwelle, betrachtet werden kann.

Die neue Lage der Wellenfront ergibt sich durch Überlagerung (Superposition) sämtlicher Elementarwellen (in drei Dimensionen sind Elementarwellen kugelförmig, in zwei Dimensionen kreisförmig).

Die sich weiter ausbreitende Wellenfront ergibt sich als die äußere Einhüllende der Elementarwellen, da sich die Elementarwellen im selben Medium und mit gleicher Geschwindigkeit ausbreiten wie die ursprüngliche Welle. Bei unterschiedlichen Medien ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit und damit auch die Ausbreitungsrichtung der Welle, was sich als Brechung bemerkbar macht. Am Rand eines Hindernisses (z. B. Spalt) führt das Huygenssche Prinzip zur Beugung.

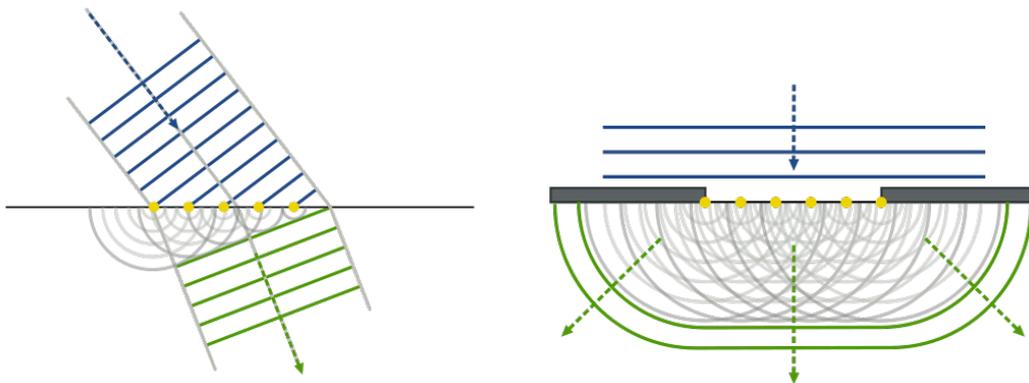


Abbildung 7: Huygenssches Prinzip: Links Brechung, rechts Beugung (aus Wikipedia).

3.4 Paraxiale Näherung, Fourier-Optik

Um nicht auf die rein geometrische Konstruktion von Wellenfronten beschränkt zu sein, ist es sinnvoll, das Huygenssche Prinzip auch mathematisch zu formulieren. Abbildung 8 skizziert die Geometrie: Von der Fläche bei z_0 ausgehende elementare Kugelwellen addieren sich am Ort $\mathbf{r} = (x, y, z)$ zum Feld $E(\mathbf{r})$. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Feldvektoren

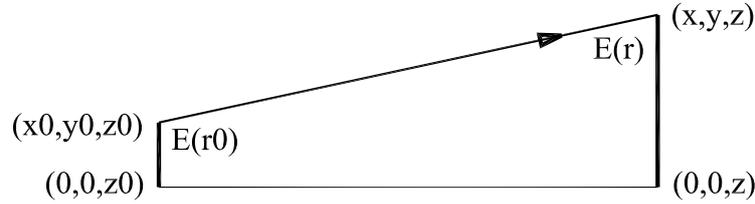


Abbildung 8: Geometrie für die mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips. Licht propagiert von links nach rechts ($z > z_0$).

der einzelnen Kugelwellen an der Stelle \mathbf{r} alle in die gleiche Richtung zeigen, wir also mit einem skalaren Feld E rechnen können. Wenn wir darüber hinaus annehmen, dass das Feld nur eine Frequenz enthält, d. h. streng monochromatisch ist, wird

$$E(\mathbf{r})_{\mathbf{r}_0} \propto \frac{E(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \exp(i|\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)|) . \quad (49)$$

Wir nehmen weiter an, dass alle Wellenvektoren \mathbf{k} ungefähr parallel zur z -Achse liegen, wir also auch hier skalar rechnen können. Dann erhalten wir das gesamte Feld durch Integration über x_0 and y_0 in der z_0 -Ebene

$$E(\mathbf{r}) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) dx_0 dy_0 . \quad (50)$$

Wenn man annimmt, dass man nur einen kleinen Bereich um die optische Achse betrachtet – man nennt dies *Paraxiale Näherung* – dass also gilt

$$(z - z_0)^2 \gg (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 , \quad (51)$$

kann

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (52)$$

approximiert werden durch

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = (z - z_0) \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(z - z_0)^2}} \quad (53)$$

$$\approx (z - z_0) \left[1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)^2} \right] . \quad (54)$$

Mit

$$\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) = \exp(ik(z - z_0)) \exp \left[ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right] \quad (55)$$

und

$$\begin{aligned} & \exp \left[ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right] \\ &= \exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{2(z - z_0)} \right] \exp \left[-ik \frac{xx_0 + yy_0}{z - z_0} \right] \exp \left[ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2(z - z_0)} \right] , \quad (56) \end{aligned}$$

kann Gleichung 50 umgeschrieben werden zu

$$E(x, y) \propto \frac{P(x, y)}{z - z_0} \iint E(x_0, y_0) P(x_0, y_0) \exp \left[-ik \frac{xx_0 + yy_0}{z - z_0} \right] dx_0 dy_0 . \quad (57)$$

Darin ist

$$P(x, y) = \exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{2(z - z_0)} \right] . \quad (58)$$

Gleichung 57 kann als Abfolge von drei Operationen interpretiert werden:

- Das Feld $E(x_0, y_0)$ wird mit einem Phasenfaktor $P(x_0, y_0)$ multipliziert.
- Für das Produkt wird die zweidimensionale Fourier-Transformation berechnet.
- Das Resultat wird mit einem zweiten Phasenfaktor $P(x, y)$ multipliziert.

Wenn die Näherungen gemacht werden können, die zu Gleichung 57 führen, bezeichnet man das als *Fresnelsche Näherung* oder *Fresnelsche Beugung* (mehr dazu in weiterführenden Optik-Büchern).

Wenn man zusätzlich annehmen kann, dass $P(x_0, y_0) \approx 1$ im gesamten betrachteten Bereich ist (d. h. im Allgemeinen, dass $z - z_0$ groß genug ist, im Idealfall unendlich), kann die Gleichung 57 vereinfacht werden zu

$$E(x, y) \propto \frac{P(x, y)}{z - z_0} \iint E(x_0, y_0) \exp \left[-ik \frac{xx_0 + yy_0}{z - z_0} \right] dx_0 dy_0 . \quad (59)$$

Abgesehen von einem Phasenfaktor, der auf die Intensität keinen Einfluss hat, ist $E(x, y)$ direkt die zweidimensionale Fourier-Transformation von $E(x_0, y_0)$. Man spricht dann von *Fraunhoferscher Näherung* oder *Fraunhoferscher Beugung*. Experimentell realisiert man Fraunhofersche Beugung meist dadurch, dass man das *Unendliche* durch eine geeignete Sammellinse in deren Brennebene transformiert.

Mit den Beugungswinkeln $\phi = \frac{x}{z - z_0}$ und $\theta = \frac{y}{z - z_0}$ lässt sich die örtliche Amplitudenverteilung $E(x, y)$ an der Stelle z der Gleichung 59 in eine Winkelverteilung $E(\phi, \theta)$ umschreiben. Beide Beschreibungen sind im Rahmen der Fraunhoferschen Näherung äquivalent.

Beispiel Spalt: Die Feldverteilung an einem Spalt der Breite D wird beschrieben durch

$$E(x_0, y_0) = \begin{cases} A & \text{für } -D/2 \leq x_0 \leq D/2 \\ 0 & \text{für } x_0 < -D/2, x_0 > D/2 \end{cases} . \quad (60)$$

In Gleichung 59 eingesetzt (mit $z_0 = 0$)

$$E(x, y) \propto \frac{P(x, y)}{z} \int_{y_0=-\infty}^{\infty} \int_{x_0=-D/2}^{D/2} A \exp \left[-ik \frac{xx_0 + yy_0}{z} \right] dx_0 dy_0 \quad (61)$$

und weiter vereinfacht

$$E(x, y) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-ik \frac{yy_0}{z} \right] dy_0 \int_{-D/2}^{D/2} \exp \left[-ik \frac{xx_0}{z} \right] dx_0 . \quad (62)$$

Das erste Integral ergibt die Delta-Funktion ($\delta(y)$), wir erhalten mithin ein eindimensionales Beugungsmuster bei $y = 0$

$$E(x, y) \propto -\delta(y) \frac{z}{ikx} \exp \left[-ik \frac{xx_0}{z} \right] \Big|_{-D/2}^{D/2} . \quad (63)$$

Mit den eingesetzten Grenzen, Umschreibung auf Sinus und Cosinus, sowie den Ersetzungen $k = 2\pi/\lambda$ und $u = \pi D x / (z\lambda)$ wird dann das bekannte Ergebnis

$$E(x, y) \propto \delta(y) \frac{\sin(u)}{u} . \quad (64)$$

Die Funktion hat ihre ersten Nullstellen bei $u = \pm\pi$, somit bei $x = \pm z\lambda/D$ – oder bei den Winkeln $\phi = \pm\lambda/D$. Die Feldamplitudenverteilung am Spalt sowie die Amplituden- und Intensitätsverteilung am Beugungsbild sind in Abbildung 9 dargestellt.

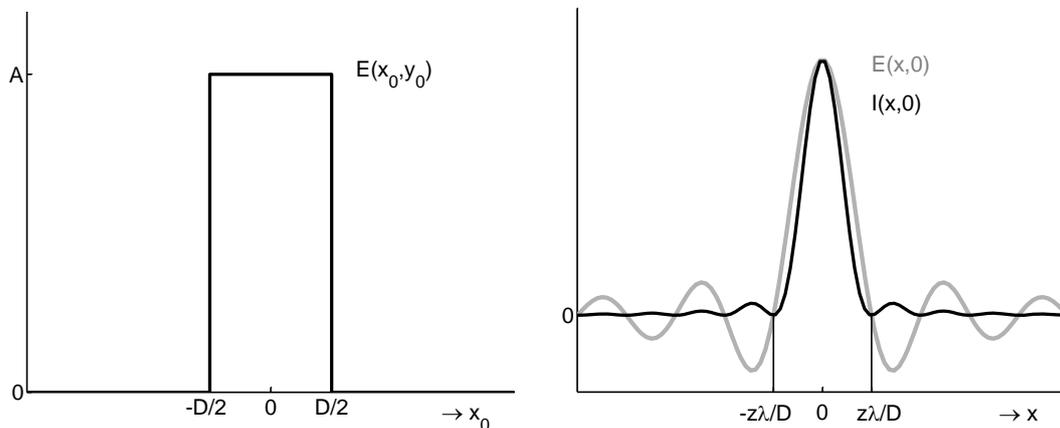


Abbildung 9: Feldamplitudenverteilung am Spalt (linkes Bild) und resultierende Amplituden- und Intensitätsverteilungen am Beugungsbild (rechtes Bild).

3.5 Experimente zur Fourier-Optik

Optik-Experimente zur Beugung und zur Interferenz werden meist in Fraunhoferscher Näherung durchgeführt. Da dies – wie wir oben gelernt haben – einer zweidimensionalen Fourier-Transformation entspricht, lassen sich solche *Experimente* auch relativ rasch mit einem Computer-Algebra- oder Numerik-Programm wie MATHEMATICA oder MATLAB realisieren. Im Folgenden einige Beispiele.

Spaltbreite: Die Struktur des Beugungsbilds ist komplementär zur Breite des Spalts (wie oben berechnet, sind die typischen Strukturdimensionen im Beugungsbild proportional zu λ/D , d. h. umgekehrt proportional zur Spaltbreite), Abbildung 10 zeigt drei Beispiele.



Abbildung 10: Beugung am Spalt, links die unterschiedlichen Spaltbreiten, rechts die zugehörigen Beugungsbilder.

Dimensionalität: Auch da sind Quellobjekt und Beugungsbild zueinander komplementär. Objekte mit in einer Dimension konstanter Intensität produzieren Beugungsbilder, die in dieser Dimension durch eine Delta-Funktion beschrieben werden und umgekehrt (Abbildungen 11 und 12).



Abbildung 11: Ein Objekt mit einer von der y -Koordinate unabhängigen Intensität (links) produziert Beugungsbild, dessen y -Abhängigkeit durch eine Delta-Funktion beschrieben wird (rechts).



Abbildung 12: Umgekehrt produziert ein in y -Richtung durch eine Delta-Funktion definiertes Objekt (links) ein Beugungsbild mit einer von y unabhängigen Intensität (rechts).

Zahl der interferierenden Bündel: Je mehr gleichartige Wellenpakete zum Beugungsbild beitragen, d. h. je mehr Quellobjekte beteiligt sind, umso schärfer wird das Beugungsmuster (Abbildung 13).

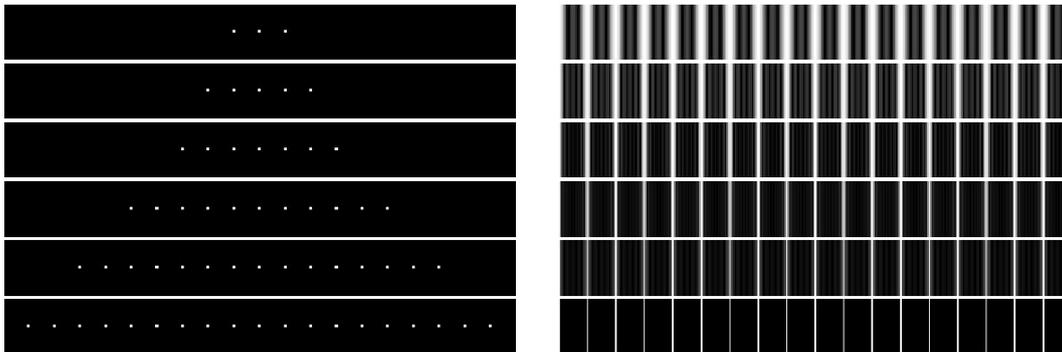


Abbildung 13: Abhängigkeit des Beugungsmusters von der Anzahl der beteiligten Quellobjekte. Die Schärfe des Beugungsmusters nimmt mit der Anzahl zu (von oben nach unten: 3, 5, 7, 11, 15, 19).

Fensterfunktion: Ein spezielles Problem bei der konkreten Durchführung der Fourier-Transformation liegt darin, dass man es mit einem begrenzten Datenbereich zu tun hat, während die ideale Theorie immer von einem unendlich großen Datenbereich ausgeht. Formal bedeutet das, dass man den unendlich großen Datenvorrat vor der Fourier-Transformation zunächst mit einer Rechteckfunktion multipliziert. Die Fourier-Transformation eines Produkts aus zwei Funktionen ist die Faltung aus den beiden getrennten Transformationen. Und die Fourier-Transformation einer Rechteckfunktion haben wir oben berechnet. Deren Seitenmaxima zeigen sich dann auch als Artefakte in Abbildung 14.

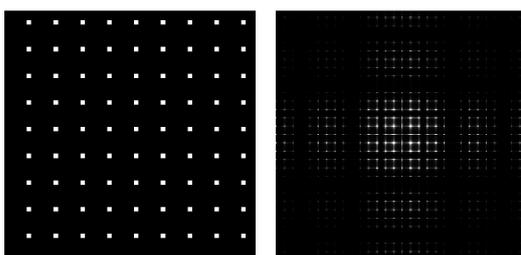


Abbildung 14: Scharf begrenztes Quellobjekt (links) und das korrespondierende Beugungsmuster (rechts). Neben den Beugungsmaxima treten seitliche Artefakte auf.

Der Effekt kann dadurch abgemildert werden, dass man statt der Rechteckfunktion eine Multiplikationsfunktion verwendet, deren Fourier-Transformierte freundlicher ist. Solche *Fensterfunktionen* sind im Allgemeinen symmetrisch und gehen an den Rändern des Datenbereichs gegen Null (Dreieck, Trapez, Parabel, Gauß, Cosinus²). In Abbildung 15 wird je eine

Cosinus²-Funktion in x - und y -Richtung verwendet

$$\text{Quellobjekt} = \text{Quellobjekt} \cdot \cos^2\left(\frac{x\pi}{2s_x}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{y\pi}{2s_y}\right). \quad (65)$$

$-s_x \dots s_x$ und $-s_y \dots s_y$ sind die Koordinatenbereiche des Quellobjekts.

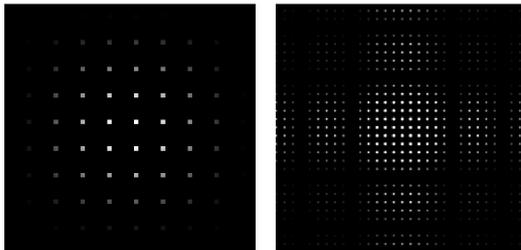


Abbildung 15: Quellobjekt der Abbildung 14 multipliziert mit einer Fensterfunktion (links). Die Artefakte in der Fourier-Transformierten (rechts) sind dadurch weitgehend unterdrückt.

Das resultierende Beugungsbild ist nun frei von irgendwelchen Artefakten. Allerdings sind die Maxima etwas breiter geworden. Das liegt daran, dass mit der Multiplikation mit einer Fensterfunktion auch immer ein (im Idealfall nur geringfügiger) Informationsverlust verbunden ist.

Elementgröße: Größe des beugenden Objekts und typische Ausdehnung des Beugungsbildes sind wiederum komplementär. Abbildung 16 zeigt dies am Beispiel kreisförmiger Objekte unterschiedlicher Größe.

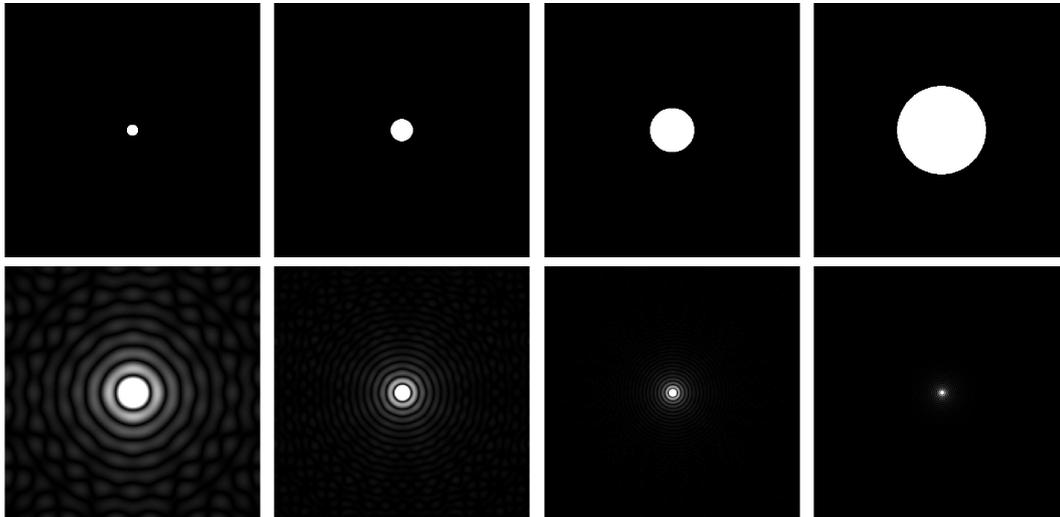


Abbildung 16: Kreisförmige Quellobjekte unterschiedlicher Größe (obere Reihe) und die dazu korrespondierenden Beugungsmuster (untere Reihe). Die Intensitäten sind auf den jeweiligen Maximalwert normiert.

Ähnliche Resultate ergeben sich bei einer zweidimensionalen periodischen Anordnung von Quellobjekten (Abbildung 17). Die Ausdehnung des Beugungsmusters ist komplementär zur Größe der Einzelobjekte.

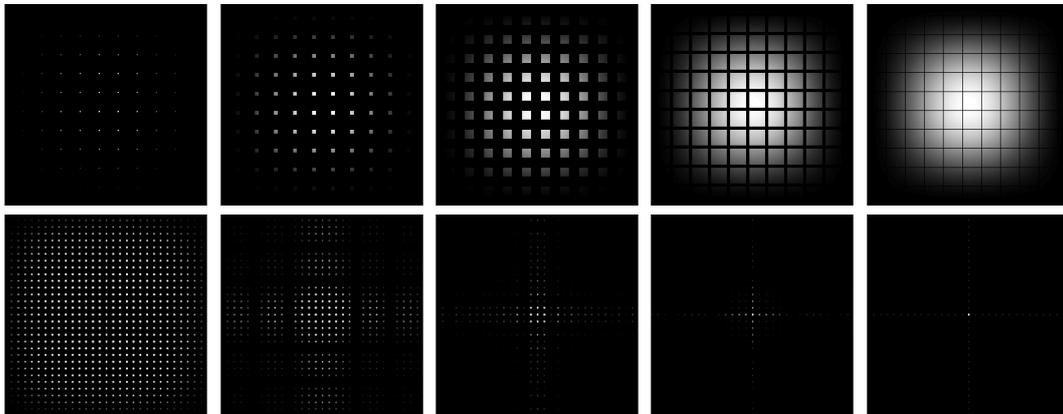


Abbildung 17: Periodische Anordnung quadratischer Quellobjekte unterschiedlicher Größe (obere Reihe) und die korrespondierenden Beugungsmuster (untere Reihe). Gleiche Periodizität bei allen Objekten, wiederum ist die Intensität auf das jeweilige Maximum normiert.

Periodizität: Ähnlich komplementär wie die Größe von Quellobjekt und Beugungsbild sind auch die Periodizitäten in x - und y -Richtung bei Quellobjekt und Beugungsbild. Das ist eine der Eigenschaften der Fourier-Transformation. Abbildung 18 veranschaulicht dies. Identische quadratische Objekte sind mit unterschiedlichen Periodizitäten angeordnet.

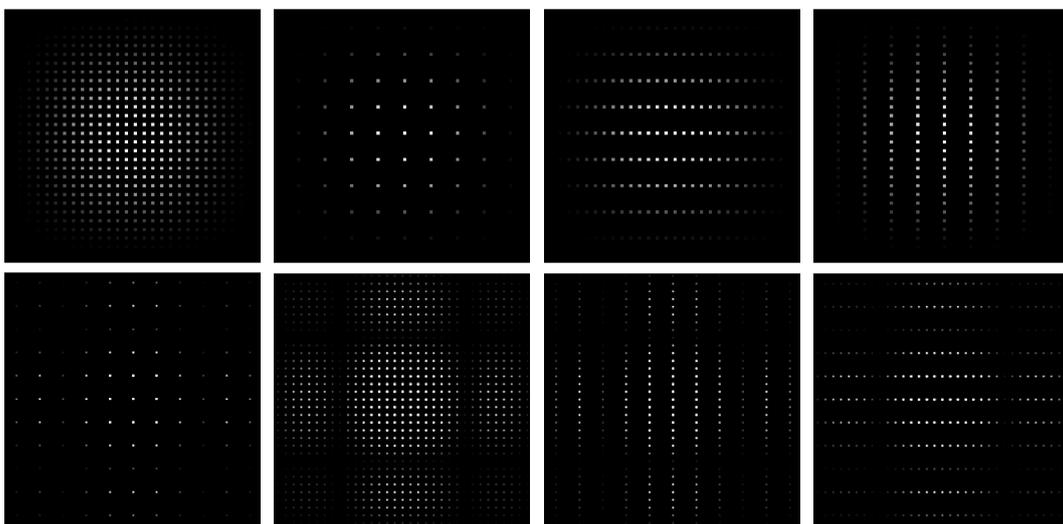


Abbildung 18: Identische Einzelobjekte, die in unterschiedlichen periodischen Abständen angeordnet sind (obere Reihe) und die zugehörigen Beugungsbilder (untere Reihe).

Reguläre Anordnung von Einzelelementen: Bei der Fourier-Transformation

sind *Multiplikation* und *Faltung* zueinander komplementäre Operationen. Die Fourier-Transformation eines Produkts aus zwei Funktionen ist gleich der Faltung der Fourier-Transformierten der Einzelfunktionen. Umgekehrt ist die Fourier-Transformierte einer Faltung gleich dem Produkt der beiden Fourier-Transformierten der Einzelfunktionen.

Eine periodische Anordnung gleicher Quellobjekte kann als Faltung aus einem Punktgitter und einem einzelnen Objekt behandelt werden. Die Fourier-Transformierte ist dann das Produkt aus den beiden elementaren Transformierten. Auf die Wellenoptik übertragen bedeutet das, dass das Beugungsmuster einer periodischen Anordnung als Produkt des Beugungsmusters des Einzelements und des Interferenzmuster des periodischen Punktgitters berechnet werden kann.

Die Abbildungen 19 – 21 veranschaulichen diese Eigenschaft der Fourier-Transformation.

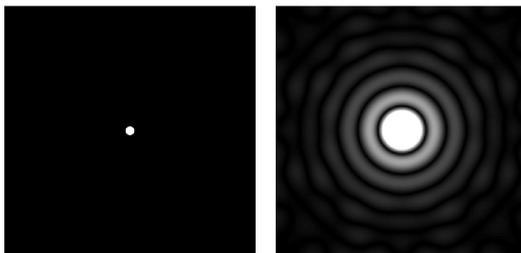


Abbildung 19: Kreisförmiges Einzelobjekt und zugehöriges Beugungsbild.

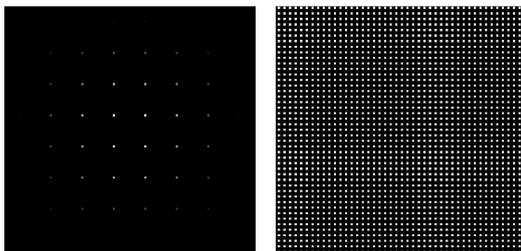


Abbildung 20: Punktgitter und zugehöriges Beugungsbild

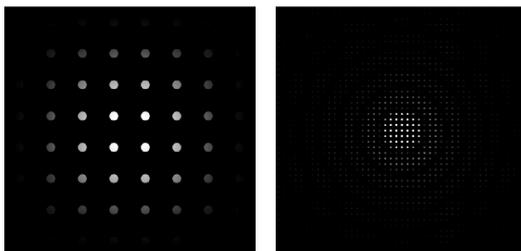


Abbildung 21: Periodische Anordnung kreisförmiger Objekte (*Faltung* aus Einzelement und Punktgitter) und zugehörige Fourier-Transformierte (*Produkt* der einzelnen Fourier-Transformierten).

Beugungsgitter: Ein Beugungsgitter (Strichgitter) ist eine (eindimensional) periodische Anordnung von gleichartigen Einzelementen (Spalte oder Spiegel). Das Beugungsmuster kann über die zweidimensionale Fourier-Transformation berechnet werden, wenn man von der Fraunhoferschen Näherung ausgeht. Einige typische Fälle sind in den folgenden Abbildungen zusammengestellt.



Abbildung 22: Ideales Gitter (sehr schmale Spalte) und zugehöriges Beugungsmuster.



Abbildung 23: Spaltbreite gleich halber Gitterkonstante: Die Minima der Spaltbeugungsfunktion (oben rechts) entsprechen den Maxima der Ordnung $N = \pm 2, \pm 4, \dots$ der idealen Gitterbeugungsfunktion. diese Beugungsordnungen fehlen dann in der Produktfunktion (unten rechts).

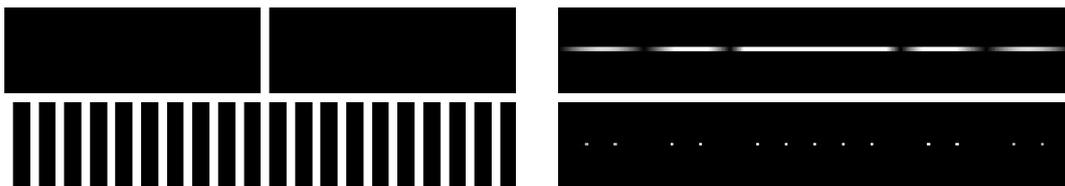


Abbildung 24: Spaltbreite gleich einem Drittel der Gitterkonstante: Die Minima der Spaltbeugungsfunktion (oben rechts) entsprechen den Maxima der Ordnung $N = \pm 3, \pm 6, \dots$ der idealen Gitterbeugungsfunktion (Ergebnis unten rechts).

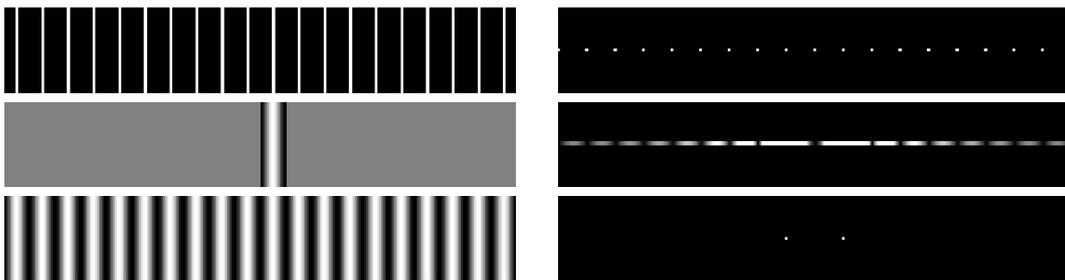


Abbildung 25: Gitter mit sinusförmiger Absorptionsstruktur. Ein Vergleich der idealen Gitterbeugung (oben) mit dem Beugungsmuster eines sinusförmig absorbierenden Spaltes (Mitte) zeigt, dass alle Maxima der Gitterfunktion außer denen mit der Ordnung $N = \pm 1$ mit Minima der Spaltfunktion zusammenfallen. Das erklärt das resultierende Beugungsmuster eines Sinusgitters (unten).

3.6 Gaußsche Strahlen

In Rahmen der geometrischen Optik geht man von *Lichtstrahlen* aus, in der Wellenoptik erweist es sich als nützlich, mit achsennahem Licht zu arbeiten, dessen Ausbreitungsvektor \mathbf{k} in etwa parallel zur optischen Achse gerichtet ist. Eine Verbindung zwischen den beiden Konzepten stellt die Optik der *Gauß-Strahlen* her.

Wir bleiben im Konzept der Wellenoptik, nehmen aber an, dass sich das Profil der Welle nur sehr langsam verändert. Die Einschränkung auf eine einzelne Frequenz ermöglicht die Elimination der Zeitabhängigkeit in der Wellengleichung, aus der Wellengleichung wird die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 . \quad (66)$$

In *paraxialer* Näherung nehmen wir an, dass die Welle sich nur in z -Richtung bewegt, nicht in x - and y -Richtung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \Psi(x, y, z)e^{ikz} . \quad (67)$$

Da Ψ nur wenig von z abhängt, können wir die partielle Ableitung $\partial^2\Psi/\partial z^2$ vernachlässigen und kommen so zur *Paraxialen* Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0 . \quad (68)$$

Als ausgedehnte Lichtstrahlen betrachten wir zunächst rotationssymmetrische Zustände $\Psi(\rho, z)$ und schreiben die paraxiale Wellengleichung in Zylinderkoordinaten um.

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial \rho} + 2ik\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0 . \quad (69)$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist (Beweis durch Einsetzen)

$$\Psi(\rho, z) = \frac{A_0}{kq} \exp\left(i\frac{k\rho^2}{2q}\right) \quad \text{mit} \quad q = z - iz_0 . \quad (70)$$

Darin ist A_0 ein Amplitudenfaktor und z_0 eine etwas willkürlich eingeführte weitere Integrationskonstante.

Umgeformt auf etwas anschaulichere Größen wird daraus

$$\Psi(\rho, z) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i \arctan \frac{z}{z_0}\right) , \quad (71)$$

Darin sind w_0 der Strahlradius an der Strahltaile (bei $z = 0$), $w(z)$ der Strahlradius an der Stelle z und $R(z)$ der Krümmungsradius der Wellenfronten an der Stelle z . Als Strahlradius definieren wir den Abstand von der optischen Achse, an dem die Feldamplitude auf $1/e$ abgefallen ist.

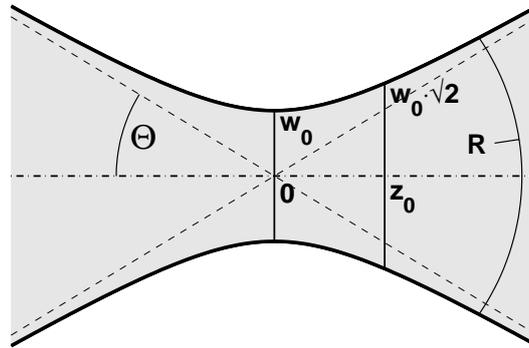


Abbildung 26: Profil eines Gauß-Strahls in der Nähe des Fokuspunkts.

Die Form eines solchen Gaußschen Strahl in der Nähe der Strahlteile und die zugehörigen geometrischen Größen sind in Abbildung 26 skizziert. Die geometrischen Größen sind durch die Konstante z_0 definiert, z_0 ist die Entfernung von der Strahlteile, in der sich die Querschnittsfläche des Strahls gerade verdoppelt hat ($w(z_0) = \sqrt{2} w_0$).

Zwischen z_0 und w_0 gilt die Beziehung

$$z_0 = \frac{\pi}{\lambda} w_0^2 . \quad (72)$$

Der Strahlradius an der Stelle z ist gegeben durch

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_0)^2} , \quad (73)$$

der Krümmungsradius R der Wellenfronten durch

$$R(z) = z \left[1 + (z_0/z)^2 \right] \quad (74)$$

und die Strahldivergenz Θ durch

$$\Theta = w_0/z_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0} . \quad (75)$$

Den Bereich $-z_0 < z < z_0$ bezeichnet man als Rayleigh-Zone, ihre Länge $b = 2z_0$ auch als konfokalen Parameter oder Fokustiefe¹⁰. Wenn man vom Fokus eines Strahls spricht, sollte man sinnvollerweise den Gesamtbereich der Rayleigh-Zone meinen. Dort ändert sich der Strahlquerschnitt nur geringfügig. Im Bereich $|z| \ll z_0$ sind die Wellenfronten nahezu eben, ihre stärkste Krümmung haben sie bei $z = \pm z_0$.

¹⁰Darüber lässt sich unter anderem die *Tiefenschärfe* bei optischen Abbildungen definieren.

Der Bereich $|z| < z_0$ wird auch als *Nahfeld* der außerhalb ($|z| \gg z_0$) als *Fernfeld* bezeichnet.

Der theoretisch kleinste erreichbare Strahlradius (beste Fokussierung) für einen Gaußschen Strahl kann aus Gleichung 75 hergeleitet werden

$$w_{0,\min} = \frac{\lambda}{\pi \Theta_{\max}} = \frac{F_{\#} \lambda}{2\pi}, \quad (76)$$

darin ist $F_{\#}$ die Apertur des verwendeten optischen Systems¹¹.

Strahlparameterprodukt: Das Produkt aus w_0 und Θ bezeichnet man als Strahlparameterprodukt (SPP). Für einen idealen Gaußschen Strahl ist dies über die Gleichung 75 definiert (λ/π). Für reale Strahlen ist dieses Produkt größer, für die Abweichung vom Idealfall hat man die *Beugungsmaßzahl* M^2 eingeführt

$$\text{SPP} = \Theta w_0 = M^2 \frac{\lambda}{\pi}. \quad (77)$$

Durch M^2 kann auch die Strahlqualität von Lasern charakterisiert werden. Diese ist umso besser, je näher M^2 bei eins liegt.

Transversale Moden: Die paraxiale Wellengleichung hat außer der diskutierten rotationssymmetrischen Lösung noch weitere, die durch Multiplikation mit *Hermite-Polynomen* in x - und y -Richtung definiert werden¹². Man nennt diese Lösungen auch *Transversale Moden* oder Gauß-Moden eines Strahls und bezeichnet sie nach der Zahl der Nullstellen (bzw. nach der Polynomordnung) als TEM _{mn} -Moden¹³ (m – Polynomordnung in x , n – Polynomordnung in y). Abbildung 27 zeigt die Intensitätsverteilung bei einigen Beispielmodes.

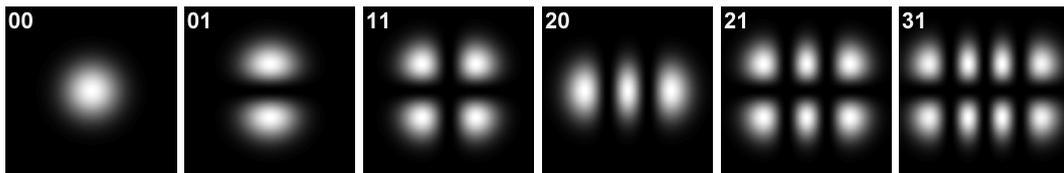


Abbildung 27: Beispiele für die transversale Intensitätsverteilung bei TEM _{mn} -Moden, m und n sind jeweils links oben angegeben.

Matrixformulierung für Gauß-Strahlen: Ein Gauß-Strahl am Ort z kann durch zwei geeignete Parameter aus den oben beschriebenen definiert werden, beispielsweise durch das Paar (w_0, R) oder durch (z, z_0) . Betrachtet man

¹¹Fotografen auch als Blendenzahl geläufig.

¹²In diesem Fall ist die Wellengleichung in kartesischen Koordinaten zu verwenden. Bleibt man bei Zylinderkoordinaten, ergeben sich Polynome in ρ und ϕ als Basislösungen. In optischen Systemen ist jedoch in aller Regel die Rotationssymmetrie gestört, so dass man meist ein problemangepasstes kartesisches System zu definieren hat.

¹³TEM ist die Abkürzung für transversales elektrisches und magnetisches Feld.

einen Randstrahl, so lässt sich der im Abschnitt 2.4 für die Matrixformulierung der geometrischen Optik eingeführte Beschreibungsvektor r aus den zwei Parametern des Gauß-Strahls berechnen. Und umgekehrt. Man kann also die Matrizen der geometrischen Optik verwenden, um die Wirkung von optischen Elementen auf Gauß-Strahlen zu berechnen. Üblich ist es, die oben eingeführte komplexe Größe q zur Beschreibung zu verwenden. Damit ergibt sich

$$q_2 = \mathbf{M} \otimes q_1 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \quad (78)$$

die Matrixformulierung für Gauß-Strahlen. Darin sind A , B , C und D die aus der geometrischen Optik bekannten Matrixelemente der Transformationsmatrix.

Auch für das in Gleichung 78 definierte Produkt lässt sich Assoziativität zeigen

$$\begin{aligned} q_2 = \mathbf{M}_2 \otimes (\mathbf{M}_1 \otimes q_1) &= \frac{A_2 \frac{A_1 q_1 + B_1}{C_1 q_1 + D_1} + B_2}{C_2 \frac{A_1 q_1 + B_1}{C_1 q_1 + D_1} + D_2} = \frac{(A_2 A_1 + B_2 C_1) q_1 + A_2 B_1 + B_2 D_1}{(C_2 A_1 + D_2 C_1) q_1 + C_2 B_1 + D_2 D_1} \\ &= (\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1) \otimes q_1. \end{aligned} \quad (79)$$

Das Beschreibungsverfahren aus der geometrischen Optik und die dort definierten Matrizen können somit auch auf Gauß-Strahlen angewendet werden.

3.7 Kohärenz

Gerthsen: Wellen sind kohärent, wenn die Zeitabhängigkeit der Amplitude in ihnen bis auf eine Phasenverschiebung die gleiche ist.

Das ist sicher nicht falsch, definiert aber kein quantitatives Maß für die Kohärenz.

Mit *Kohärenz* ist meist die *zeitliche* oder *longitudinale* Kohärenz gemeint. Anschaulich kann man unter der *Kohärenzzeit* die Zeit verstehen, während der eine Welle gleichphasig schwingt. In Abbildung 28 ist das τ_0 . Die zugehörige Laufstrecke, Kohärenzzeit mal (Licht-)Geschwindigkeit, ist die *Kohärenzlänge*. Damit zwei Teilwellen miteinander *interferieren* können, muss ihre Wegdifferenz kleiner als die Kohärenzlänge sein. Für ein *Michelson-Interferometer* bedeutet das, dass die Asymmetrie zwischen den beiden Armen kleiner als die halbe Kohärenzlänge der Lichtquelle sein muss, damit man noch Interferenzringe sehen kann.

Abbildung 28 stellt einen Idealfall dar, festes τ_0 und feste Frequenz. In diesem Fall wäre theoretisch auch eine interferenzfähige Überlagerung zwi-

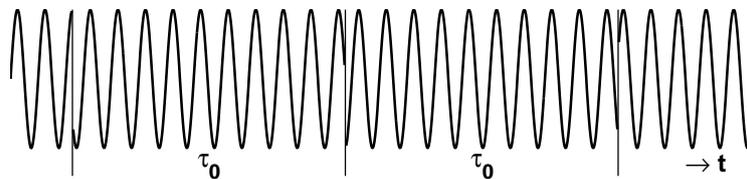


Abbildung 28: Kohärenz – ein Wellenzug hat für Zeiten τ_0 , die Kohärenzzeit, jeweils eine einheitliche Phase.

schon dem Wellenzug aus dem ersten und dem aus dem zweiten Zeitraum möglich. Real ändert sich meist auch die Frequenz ein wenig (Abbildung 29).

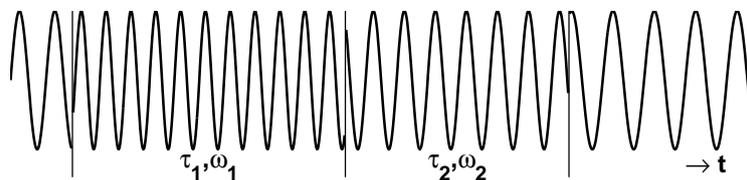


Abbildung 29: Kohärenz, realere Darstellung – die Kohärenzzeiten streuen, zusätzlich ändert sich die Frequenz (hier übertrieben dargestellt).

Mathematisch beschreibt man die zeitliche Kohärenz durch die Korrelationsfunktion über das elektrische Feld

$$\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T E^*(t) E(t + \tau) dt . \quad (80)$$

Der Kohärenzgrad $\gamma(\tau)$ ist die auf den Wert für $\tau = 0$ normierte Größe

$$\gamma(\tau) := \frac{\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle}{\langle E^*(t) E(t) \rangle} . \quad (81)$$

Für eine ideale monochromatische Schwingung $E(t) = A \exp(i\omega t)$ wird

$$\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle = \frac{A^2}{T} \int_0^T \exp(-i\omega t) \exp(i\omega(t + \tau)) dt = A^2 \exp(i\omega\tau) , \quad (82)$$

damit der Kohärenzgrad

$$\gamma(\tau) = \exp(i\omega\tau) . \quad (83)$$

Die Welle ist vollständig kohärent, der Betrag des Kohärenzgrads ist

$$|\gamma(\tau)| = 1 \quad \text{für alle Zeiten } \tau . \quad (84)$$

Allgemein kann der Betrag des Kohärenzgrades zwischen 0 und 1 liegen, 0 bei völlig inkohärenten Wellen, 1 bei idealer Kohärenz. In realen Fällen ist

er eine Funktion von τ , 1 bei $\tau = 0$, gegen 0 gehend bei größer werdendem τ .

Der Betrag des Kohärenzgrads bestimmt den Kontrast K bei Interferenzexperimenten – der Kontrast ist durch die maximalen und minimalen Intensitäten I_{\max} und I_{\min} in einem Interferenzmuster definiert als

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (85)$$

Idealen Kontrast hat man, solange $|\gamma|$ nahe bei 1 liegt, mit $|\gamma| \rightarrow 0$ geht auch der Kontrast gegen Null. Für gleiche Intensitäten in den interferierenden Teilstrahlen ist K direkt gleich $|\gamma|$, für unterschiedliche Intensitäten I_1 und I_2 wird

$$K = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma|. \quad (86)$$

Wiener-Khintchine-Theorem: Frequenzspektrum und Kohärenzgrad sind durch die Fourier-Transformation verbunden.

Für die Praxis bedeutet das, dass die Breite des Frequenzspektrums und die Kohärenzzeit bzw. die Kohärenzlänge zueinander komplementäre Größen sind. Je schmalbandiger (je "monochromatischer") also eine Lichtquelle ist, umso größer ist ihre Kohärenzlänge.

Anwendung 1: Wenn die Kohärenzlänge für ein bestimmtes Interferenzexperiment nicht ausreicht, kann ich das durch Einengung des Spektrums (Farbfilter) verbessern.

Anwendung 2: Die spektrale Bandbreite einer Lichtquelle kann ich dadurch bestimmen, dass ich die Kohärenzlänge messe (z. B. mit einem Michelson-Interferometer).

Räumliche oder transversale Kohärenz: Hat nichts mit der obigen Kohärenzlänge zu tun. Gibt an, inwieweit Licht, das von verschiedenen Orten eine Lichtquelle ausgeht, interferenzfähig ist. Anschaulich gilt ganz grob, dass solches Licht dann interferenzfähig ist, wenn man die beiden Orte mit dem verwendeten Instrument nicht getrennt darstellen kann (Beugungsbilder überlappen sich)¹⁴.

¹⁴Eine interessante Anwendung ist die Bestimmung der Größe von Sternen: Man misst die Interferenz zwischen Lichtwellen, die vom Stern an zwei voneinander entfernten Punkten auf der Erde ankommen, als Funktion des Abstandes. Sobald die Interferenz verschwindet, ist der Stern optisch aufgelöst, der zugehörige Punktabstand definiert den Raumwinkel, unter dem der Stern gesehen wird.

4 Lichtquanten

Die Wellenoptik konnte im 19. Jahrhundert alle optischen Phänomene zufriedenstellend erklären. Ende des 19. Jahrhunderts gab es dann sorgfältig durchgeführte Experimente, die im Rahmen der Wellenoptik nicht mehr erklärt werden konnten.

4.1 Plancksches Strahlungsgesetz

Kurz vor Ende des 19. Jahrhunderts wurde das Spektrum von *Schwarzen Körpern* bzw. *Hohlraumstrahlern* in der damaligen *Physikalisch-Technischen Reichsanstalt* (Berlin) sehr genau vermessen¹⁵. Es zeigte sich, dass die bis dahin bekannten Formeln

$$\textbf{Wien:} \quad \rho(\nu, T) d\nu \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu \quad (87)$$

$$\textbf{Rayleigh-Jeans:} \quad \rho(\nu, T) d\nu \approx \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu \quad (88)$$

die experimentellen Ergebnisse nicht völlig exakt beschreiben konnten. Wien funktioniert für große Frequenzen, Rayleigh-Jeans für kleine.

Max Planck kam auf die Idee, zwischen den beiden Formeln geschickt zu interpolieren

$$\textbf{Planck:} \quad \rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu . \quad (89)$$

Wien und Rayleigh-Jeans sind die Näherungen für $h\nu \gg kT$ bzw. $h\nu \ll kT$.

Für Planck zunächst nur eine geschickte mathematische Formulierung, kann die Veröffentlichung der Formel im Jahr 1900 als Beginn der Quantenphysik angesehen werden.

Herleitung nach Einstein: Dazu betrachtet man ein Zwei-Niveau-System, das sich mit dem Strahlungsfeld im Gleichgewicht befindet (Abb. 30).

Nach Einstein sind zwischen den beiden Niveaus drei Prozesse möglich:

Absorption: Übergänge von Niveau 1 nach Niveau 2 mit der Rate $B_{12}\rho$.

Spontane Emission: Übergänge von Niveau 2 nach Niveau 1 mit der Rate A_{21} .

¹⁵Zweck der Messungen war es, Glühlampen möglichst gut charakterisieren zu können.

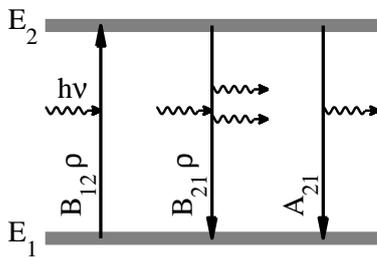


Abbildung 30: Zur Herleitung der Planckschen Strahlungsformel wird ein Zwei-Niveau-System mit den Energien E_1 und E_2 betrachtet. Zwischen den Niveaus erfolgen Übergänge durch Absorption (links), induzierte Emission (Mitte) und spontane Emission (rechts).

Induzierte Emission: Übergänge von Niveau 2 nach Niveau 1 mit der Rate $B_{21}\rho$.

$\rho(\nu)$ ist die Energiedichte des Strahlungsfeldes. Im thermischen Gleichgewicht muss die Zahl der Übergänge von 1 nach 2 gleich der von 2 nach 1 sein. Zahl der Übergänge pro Zeiteinheit ist Rate mal Besetzungszahl. Mit den Besetzungszahlen N_1 und N_2 gilt dann

$$B_{12}\rho N_1 = A_{21}N_2 + B_{21}\rho N_2. \quad (90)$$

Für die Verteilung von Teilchen in einem Gesamtsystem gilt im thermischen Gleichgewicht die Boltzmann-Verteilung, damit verhalten sich die Besetzungszahlen wie

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\exp(-E_1/kT)}{\exp(-E_2/kT)} = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) = \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (91)$$

In Gl. 90 eingesetzt und nach ρ aufgelöst

$$\rho = \frac{A_{21}}{B_{12} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - B_{21}}. \quad (92)$$

Aus der Bedingung, dass für $T \rightarrow \infty$ auch $\rho \rightarrow \infty$ gehen muss, folgt die Gleichheit von B_{21} und B_{12} , das Verhältnis A_{21}/B_{12} erhält man durch Vergleich mit der Rayleigh-Jeans-Formel für sehr kleine Frequenzen (Reihenentwicklung der Exponentialfunktion).

Cosmic Background Explorer: Eine sehr genaue Messung einer Planck-Verteilung wurde um 1990 von dem Satelliten *Cosmic Background Explorer* (COBE) vorgenommen. Das Experiment diente zur Erforschung der kosmischen Hintergrundstrahlung¹⁶ Abbildung 31 zeigt die Messdaten im Vergleich mit einer daran angepassten Planck-Verteilung.

¹⁶Der Satellit verwendete unter anderem ein Fern-Infrarot-Spektrometer, das mit flüssigem Helium gekühlt wurde, seit Ende 1990 ist das Helium alle. Die Mission wird inzwischen von WMAP fortgesetzt, der Unregelmäßigkeiten der Hintergrundstrahlung erforschen soll. Näheres zu beiden Missionen finden Sie im Web.

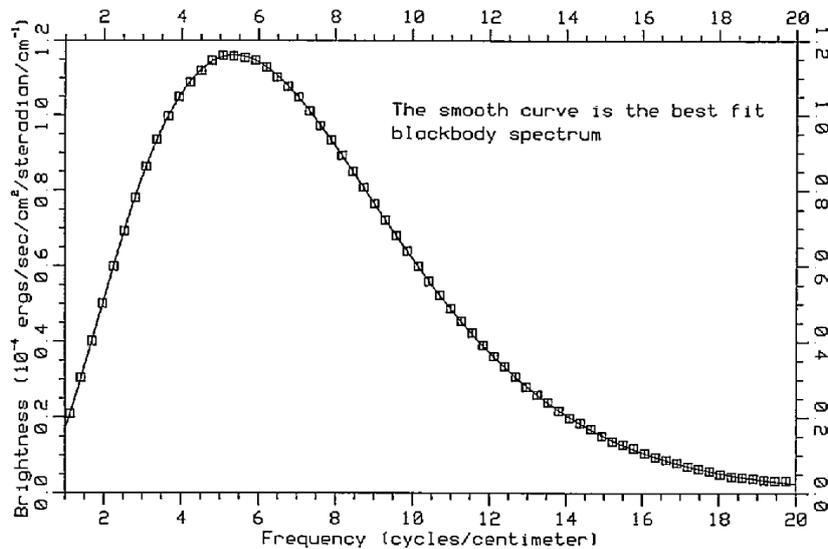


Abbildung 31: Die vom Satelliten COBE gemessene Verteilung der kosmischen Hintergrundstrahlung. Die daran angepasste Planck-Kurve ergibt eine Temperatur von 2.735 ± 0.06 K. Das Bild ist aus der Originalveröffentlichung entliehen (J. C. Mather, E. S. Cheng, R. E. Eplee, R. B. Isaacman, S. S. Meyer, R. A. Shafer, R. Weiss, E. L. Wright, C. L. Bennett, N. W. Boggess, E. Dwek, S. G. Gulbis, M. G. Hauser, M. Janssen, T. Kelsall, P. M. Lubin, S. H. Moseley, Jr., T. L. Murdock, R. F. Silverberg, G. F. Smoot, & D. T. Wilkinson: *A Preliminary Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite*, *Astrophysical Journal Letters*, 354, L37, 1990.).

4.2 Äußerer Photoeffekt

Erstmals beobachtet wurde der äußere Photoeffekt (Licht kann Elektronen aus einer Metalloberfläche auslösen) 1839 von Becquerel, systematisch untersucht aber erst 1886/87 von Heinrich Hertz und Wilhelm Hallwachs.

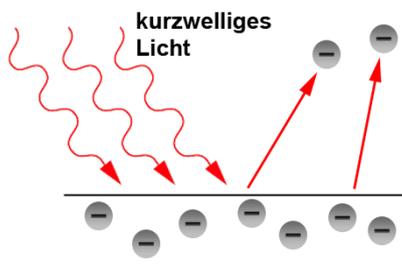


Abbildung 32: Äußerer Photoeffekt: Licht löst Elektronen aus einer Metalloberfläche aus (Bild aus Wikipedia).

Experimentell wurde festgestellt, dass die kinetische Energie der Elektronen nur von der Frequenz des Lichts abhängt, nicht von der Intensität. Wie die Geschichte weiter ging, ist bekannt: Einstein führt 1905 die Lichtquanten ein und erhält dafür 1921 den Nobelpreis.

4.3 Compton-Effekt

Durch den Compton-Effekt (Arthur Holly Compton 1922, Nobelpreis 1927) gelang der endgültige Nachweis, dass Licht Teilchencharakter hat.

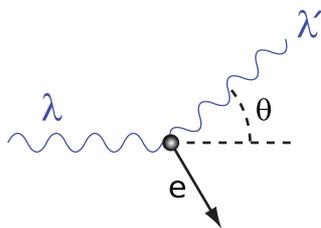


Abbildung 33: Schema des Compton-Effekts: Das gestreute Photon (λ') hat eine vom Streuwinkel θ abhängige verringerte Energie – $\lambda' > \lambda$ (Bild aus Wikipedia).

Der Energieverlust beim Compton-Effekt ist im Wellenbild nicht zu erklären. Geht man von Teilchen aus, kann der Effekt durch Energie- und Impulserhaltungssatz vollständig beschrieben werden.