

# LASERPHYSIK

LASERGRUNDLAGEN.TEX KB 20070512

KLAUS BETZLER<sup>1</sup>

FACHBEREICH PHYSIK, UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

## C: LASER – GRUNDLAGEN

Bei der Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes nach Einstein wurde die induzierte Emission eingeführt. Damit steht ein Rekombinationsprozess zur Verfügung, mit dem prinzipiell Licht verstärkt werden kann. Da aber die Einstein-Koeffizienten  $B_{12}$  und  $B_{21}$  gleich groß sind, überwiegt – die Besetzung des Grundniveaus  $N_1$  ist größer als die des angeregten Niveaus<sup>2</sup>  $N_2$  – immer die Absorption. Mit einem Zwei-Niveau-System ist somit keine Verstärkung möglich<sup>3</sup>.

Damit die induzierte Emission die Absorption überwiegt, somit dann Verstärkung möglich ist, muss eine Besetzungsinversion dieser beiden Niveaus erreicht werden ( $N_2 > N_1$ ). Dazu muss ein geeignetes Anregungsverfahren implementiert werden, man braucht einen *Pumpprozess*. Aktives Medium und Pumpmechanismus reichen schon aus, um Licht zu verstärken, für einen selbstschwingenden Oszillator (das verbindet man über die *Light Amplification* hinaus mit einem *Laser*) ist zusätzlich eine *Rückkopplung* notwendig, realisiert im Allgemeinen durch einen *Resonator*. Diese drei Grundkomponenten – Pumpmechanismus, aktives Medium, Resonator – sind in allen Lasern vorhanden.

### 1 Besetzungsinversion, Anregungsmechanismen

Bei optischer Anregung kann Besetzungsinversion nur durch den Umweg über günstige weitere Niveaus erreicht werden.

---

<sup>1</sup>KLAUS.BETZLER@UNI-OSNABRUECK.DE

<sup>2</sup>Wenn man von einer Boltzmann-Verteilung mit positiven Temperaturen ausgeht.

<sup>3</sup>Grundsätzlich könnte man sich bei einem Gas vorstellen, das thermische Gleichgewicht dadurch zu stören, dass man die angeregten Atome oder Moleküle ‘von Hand’ aussortiert und getrennt in einem Resonator sammelt. Beim Ammoniak-Maser wird das so ähnlich gemacht, man sortiert natürlich nicht von Hand, sondern mit einem elektrischen Feld.

## 1.1 Das Drei-Niveau-System

Ein weiteres Niveau<sup>4</sup> reicht aus, um Inversion über optische Anregung zu erreichen. Das Schema eines solchen Drei-Niveau-Systems ist in Abbildung 1 skizziert.

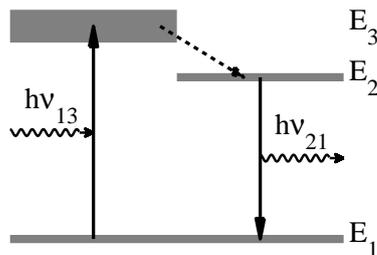


Abbildung 1: Drei-Niveau-System mit den Energieniveaus  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$ . Neben den eingezeichneten Übergängen Absorption  $1 \rightarrow 3$  und Emission  $2 \rightarrow 1$  sind auch alle anderen vom Zwei-Niveau-System her bekannten relevant.

Durch Einstrahlung von Licht geeigneter Energie ( $h\nu_{13} = E_3 - E_1$ ) werden Elektronen aus dem Grundniveau  $E_1$  in den Zustand  $E_3$  angehoben. Diese sollten bevorzugt zum Niveau  $E_2$  relaxieren, um so eine Inversion  $N_2 > N_1$  zu erreichen.

Die vom Zwei-Niveau-System her bekannten Übergänge Absorption, spontane Emission und stimulierte Emission müssen auch bei einer Beschreibung des Drei-Niveau-Systems – zwischen jeweils zwei der drei Niveaus – berücksichtigt werden. Für die zeitliche Änderung der Besetzungen  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$  ergeben sich die *Ratengleichungen*

$$\frac{dN_1}{dt} = N_2 A_{21} + N_3 A_{31} + (N_2 - N_1) B_{21} \rho(\nu_{12}) + (N_3 - N_1) B_{31} \rho(\nu_{13}), \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_3 A_{32} - N_2 A_{21} - (N_2 - N_1) B_{21} \rho(\nu_{12}) + (N_3 - N_2) B_{32} \rho(\nu_{23}), \quad (2)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = -N_3 A_{32} - N_3 A_{31} - (N_3 - N_1) B_{31} \rho(\nu_{13}) - (N_3 - N_2) B_{32} \rho(\nu_{23}). \quad (3)$$

Die Gesamtzahl der beteiligten Systeme (in der Regel Elektronen) sollte konstant sein

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = 0. \quad (4)$$

Das zeigt auch die Addition der Ratengleichungen<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Ohne die Allgemeingültigkeit einzuschränken, gehen wir im Folgenden von Systemen aus, bei denen im aktiven Medium (Atome, Moleküle in einem Gas oder einer Flüssigkeit, Dotierungsatome im Festkörper etc.) die Laserübergänge zwischen Elektronen-Niveaus stattfinden.

<sup>5</sup>Die kann man mit dieser Bedingung auf formale Richtigkeit (Vorzeichenfehler etc.) testen.

Mit der Frequenz  $\nu_P = \nu_{13}$  wird gepumpt,  $\nu_L = \nu_{12}$  ist die gewünschte Emission, bei  $\nu_{23}$  erwarten wir keine Intensität,  $\rho(\nu_{23})$  können wir mithin als Null annehmen. Damit vereinfacht sich das Gleichungssystem ein wenig.

Da  $N$  konstant ist (das haben wir implizit schon bei der Formulierung des Gleichungssystems so festgelegt), sind die drei Gleichungen nicht linear unabhängig, es genügt also, zwei zu betrachten. Wir wollen uns darüber hinaus auf den stationären Zustand beschränken ( $\frac{d}{dt} = 0$ ).

$$0 = N_3 A_{32} - N_2 A_{21} - (N_2 - N_1) B_{21} \rho(\nu_L), \quad (5)$$

$$0 = -N_3 (A_{32} + A_{31}) - (N_3 - N_1) B_{31} \rho(\nu_P). \quad (6)$$

Mit  $N_3 = N - N_1 - N_2$  wird daraus ein lineares Gleichungssystem für  $N_1$  und  $N_2$  mit den Lösungen

$$N_1 = \frac{A_{21} A_{32} + A_{21} A_{31} + A_{21} u_P + A_{31} u_L + A_{32} u_L + u_L u_P}{A_{21} A_{32} + A_{21} A_{31} + A_{32} u_P + 2A_{21} u_P + 2A_{31} u_L + 2A_{32} u_L + 3u_L u_P} \quad (7)$$

$$N_2 = \frac{A_{32} u_P + A_{31} u_L + A_{32} u_L + u_L u_P}{A_{21} A_{32} + A_{21} A_{31} + A_{32} u_P + 2A_{21} u_P + 2A_{31} u_L + 2A_{32} u_L + 3u_L u_P} \quad (8)$$

$$\text{mit } u_L = B_{21} \rho(\nu_L), \quad u_P = B_{31} \rho(\nu_P).$$

Relativ unübersichtlich, wir berechnen daraus die Differenz  $N_2 - N_1$

$$N_2 - N_1 = \frac{(A_{32} - A_{21}) u_P - A_{21} (A_{32} + A_{31})}{\text{Nenner}}. \quad (9)$$

Damit die Differenz positiv ist, man also Inversion erreicht, muss auf jeden Fall  $A_{21}$  kleiner als  $A_{32}$  sein, günstig ist  $A_{21} \ll A_{32}$ . Günstig für eine niedrige Pumpleistung ist darüber hinaus, wenn auch  $A_{31} \ll A_{32}$ .

Statt der Einstein-Koeffizienten werden üblicherweise die zugehörigen typischen Zeitkonstanten für die Übergänge angegeben, für die gilt

$$\tau_{21} \gg \tau_{32} \quad \text{und} \quad \tau_{31} \gg \tau_{32}. \quad (10)$$

**Beispiel Rubin-Laser:** Wie bei fast allen Systemen besteht das obere Pumpniveau  $E_3$  aus einer ganzen Anzahl von Zuständen, die Zeitangaben für  $\tau_{31}$  und  $\tau_{32}$  sind daher nur Größenordnungen

$$\tau_{21} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_{31} \approx 10^{-6} \text{ s}, \quad \tau_{32} \approx 10^{-8} \text{ s}.$$

Die obige Bedingung (10) ist also für Rubin in exzellenter Weise erfüllt.

## 1.2 Das Vier-Niveau-System

Um ein Vier-Niveau-System (Abbildung 2) vollständig zu beschreiben, müsste man zu den Ratengleichungen des Drei-Niveausystems eine weitere dazunehmen und die Gleichungen so erweitern, dass alle Übergänge zwischen den vier Niveaus berücksichtigt werden.

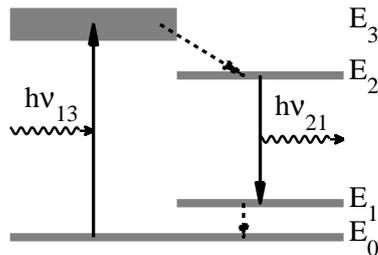


Abbildung 2: Vier-Niveau-System mit den Energieniveaus  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$ . Eingezeichnet sind nur die wichtigsten Übergänge Absorption  $0 \rightarrow 3$ , Relaxation  $3 \rightarrow 2$ , Emission  $2 \rightarrow 1$  und Relaxation  $1 \rightarrow 0$ .

Bei fast allen Systemen, die für Laser geeignet sind, kann man jedoch vereinfachende Annahmen machen, die die mathematische Behandlung drastisch vereinfachen:

- Das untere Laserniveau  $E_1$  wird sehr rasch entleert, d. h.  $N_1 \approx 0$ .
- Dadurch erhält man Inversion  $N_2 > N_1$ , sobald auch nur ein wenig gepumpt wird.
- Man benötigt üblicherweise keine hohe Pumpleistung, d. h. die Besetzung des Grundniveaus  $E_0$  ändert sich kaum,  $N_0 = \text{const.}$

Für effiziente Systeme sollten ein paar weitere Bedingungen erfüllt sein:

- Die Pumpleistung muss möglichst effizient das obere Laserniveau bevölkern, d. h.  $\tau_{30}, \tau_{31} \gg \tau_{32}$ .
- Die Zeitkonstante (Lebensdauer) des oberen Laserniveaus ( $\tau_{21}, \tau_{20}$ ) sollte möglichst groß sein, damit die Konkurrenz durch spontane Emission und durch strahlungslosen Energieverlust keine Rolle spielt.
- Andere mögliche Konkurrenzprozesse sollten keine Rolle spielen (Übergänge aus dem oberen Pump- oder aus dem oberen Laserniveau zu weiteren Zuständen).

**Beispiel Nd:YAG-Laser:** Auch hier sind die Zeitangaben für  $\tau_{10}$ ,  $\tau_{31}$  und  $\tau_{32}$  nur Größenordnungen

$$\tau_{21} = 2.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_{31} \approx 10^{-6} \text{ s}, \quad \tau_{32} \approx 10^{-8} \text{ s}, \quad \tau_{10} \approx 10^{-7} \text{ s}.$$

Die oben genannten Bedingungen sind also auch beim Nd:YAG-Laser in hinreichender Weise erfüllt.

**Quasi-Drei-Niveau-Systeme:** Liegt das untere Niveau  $E_1$  des Laserübergangs so nahe am Grundniveau  $E_0$  des Systems, dass es überwiegend thermisch besetzt ist, sind  $N_1$  und  $N_0$  über die Boltzmann-Verteilung gekoppelt.  $E_1$  kann dann in den Ratengleichungen nicht wie ein unabhängiges viertes Niveau behandelt werden.

Um den Unterschied zwischen Drei- und Vier-Niveau-System zu verdeutlichen, ist in Abbildung 3 der Verlauf der erreichten Besetzungsdifferenz in Abhängigkeit von der Pump-Intensität skizziert.

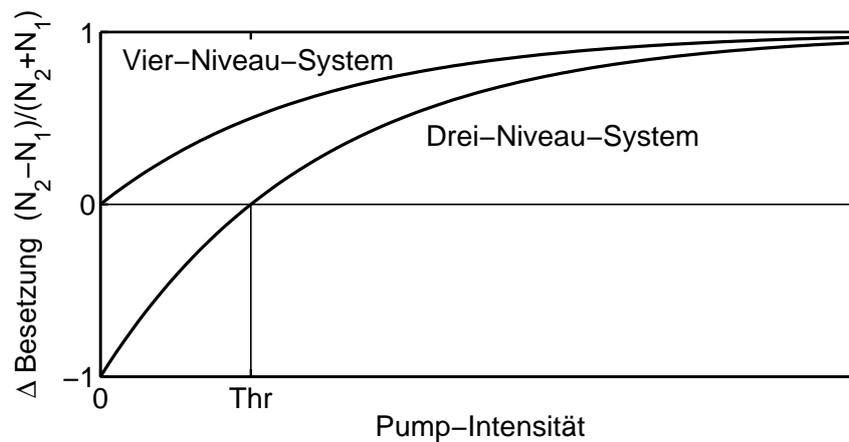


Abbildung 3: Relative Besetzungsdifferenz  $(N_2 - N_1)/(N_2 + N_1)$  als Funktion der Pump-Intensität beim Drei- und Vier-Niveau-System (typischer Verlauf). Beim Drei-Niveau-System wird Inversion (Besetzungsdifferenz  $> 0$ ) erst ab einer Schwell-Intensität (Thr) erreicht, beim idealen Vier-Niveau-System schon bei kleinsten Pump-Intensitäten.

### 1.3 Anregungsmechanismen

Neben dem optischen Pumpen, der Anregung durch Absorption von einfallendem Licht, kann eine Besetzungsinversion in laseraktiven Systemen durch eine Reihe anderer Mechanismen erreicht werden.

**Optisches Pumpen:** Eine naheliegende Methode, man strahlt intensives Licht in einem Frequenzbereich ein, in dem der Pump-Übergang des Drei- oder Vier-Niveau-System liegt. Dazu verwendet man bei konventionellen Lasern Gasentladungslampen, die ein relativ unstrukturiertes Weißlicht-Spektrum abstrahlen. Für gepulste Laser in der Regel Blitzlampen, so z. B. bei Rubin-Lasern oder bei gepulsten Nd:YAG-Lasern, für kontinuierlich arbeitende Laser kontinuierliche Lampen, so z. B. bei Nd:YAG-Lasern, die kontinuierlich betrieben werden. Das breite Spektrum der Lampen hat einerseits den Vorteil, dass immer ein Teilbereich davon vom aktiven Me-

dium absorbiert werden kann, andererseits den Nachteil, dass das restliche Spektrum nicht genutzt wird, nur zur Erwärmung des Gesamtsystems führt.

Durch die Entwicklung effizienter **Halbleiterlaser** stehen heute schmalbandige intensive Lichtquellen zur Verfügung, die gezielt für bestimmte Wellenlängen hergestellt werden können. Zumindest im Bereich der Festkörperlaser kleiner und mittlerer Leistung (Nd-YAG, Fiber-Laser) sind dadurch Gasentladungslampen als Pumplichtquellen weitgehend durch Halbleiterlaser abgelöst.

Abgesehen von Halbleiterlasern kann man auch andere Laser verwenden, um ein aktives Medium optisch zu pumpen. Dies wird häufig bei *Farbstoff-Lasern* und *Faser-Lasern* gemacht.

**Ladungsträgerinjektion:** In Halbleiterstrukturen (einfache p-n-Übergänge, Heteroübergänge, Quantentopf-Strukturen) werden die Übergangsbereiche mit Ladungsträgern – Elektronen und Löchern – überschwemmt, wenn man diese Strukturen mit Strömen in *Durchlassrichtung* betreibt (Ladungsträgerinjektion). Bei geeigneten Geometrien und genügend großen Strömen erreicht man in Teilvolumina Inversion, mit Elektronen besetzte Zustände im Leitungsband stehen dort geringer besetzten im Valenzband gegenüber.

**Elektrische Entladung:** Dieser Anregungsmechanismus wird in vielfältiger Form in Gaslasern eingesetzt. He-Ne-Laser, Edelgas-Ionen-Laser ( $\text{Ar}^+$ ,  $\text{Kr}^+$ ),  $\text{N}_2$ -Laser, Excimer-Lasern  $\text{CO}_2$ -Laser werden durch elektrische Entladungen gepumpt. Wegen der geringen Absorption ist optisches Pumpen nicht möglich, der Wirkungsquerschnitt für Stöße mit Elektronen in einer Gasentladung ist dagegen hinreichend hoch. Elektronen in Atom-, Ionen- oder Molekül-Niveaus werden dadurch in höherenergetische Zustände angeregt.

**Elektronenstrahl:** Hat eine ähnliche Wirkung wie eine elektrische Entladung, durch Elektronenbeschuss werden gebundene Elektronen angeregt. Vorteile: fokussierbar, Energie ist sehr gezielt einstellbar. Nachteil: aufwändig. Wird – mangels anderer Anregungsquellen – beispielsweise eingesetzt, um im Röntgenbereich zu arbeiten.

**Chemische Reaktion:** Ein äußerst interessantes Pump-Konzept sind exotherme chemische Reaktionen, in der Regel in Gasen. Dabei kann sehr viel Energie pro Volumen freigesetzt werden, wenn man sehr reaktive Substanzen verwendet. Da man die Ausgangsgase kontinuierlich zuführen und reagieren lassen kann, erreichen chemische Laser Spitzenleistungen im kontinuierlichen Bereich. Stichwort zum weitersuchen: MIRACL (*Mid-InfraRed Advanced Chemical Laser*). Nachteil: sehr reaktive und explosionsgefährdete Ausgangssubstanzen, daher nur im militärischen Bereich verwendet.

**Gasdynamik:** Durch einen geeigneten Verbrennungsprozess bringt man

eine Gasmischung ( $\text{CO}_2$  und andere Komponenten) auf hohe Temperatur. Dadurch befindet sich ein beträchtlicher Anteil des  $\text{CO}_2$  im oberen Laserniveau, ohne dass man schon Inversion hat. Wird nun das Gas schnell abgekühlt, z. B. durch adiabatische Expansion, so entleert sich wegen der kürzeren Lebensdauer das untere Laserniveau schneller als das obere, man erreicht Inversion. Man kann  $\text{CO}_2$ -Laser bauen, die auf dieser Basis arbeiten, wegen der komplizierten Handhabung sind sie jedoch nicht besonders alltagstauglich. Im militärischen Bereich sind sie ebenfalls wenig interessant, da sie in der Leistung deutlich unter den Chemischen Lasern liegen.

**Gamma-Strahlung:** Ein aktives Medium mit Gamma-Strahlen zu pumpen, ist eine interessante Möglichkeit, einen Röntgen-Laser zu realisieren.

Doch woher nimmt man Gamma-Strahlung genügender Intensität?

Wikipedia hat eine Antwort:

Another idea to come from the SDI<sup>a</sup> project was the nuclear-pumped X-ray laser. This was essentially an orbiting atomic bomb, surrounded by laser media in the form of glass rods; when the bomb exploded, the rods would be bombarded with highly-energetic gamma-ray photons, causing spontaneous and stimulated emission of X-ray photons in the atoms making up the rods. This would lead to optical amplification of the X-ray photons, producing an X-ray laser beam that would be minimally affected by atmospheric distortion and capable of destroying ICBMs<sup>b</sup> in flight. The X-ray laser would be a strictly one-shot device, destroying itself on activation. Some initial tests of this concept were performed with underground nuclear testing, however, the results were not encouraging. Research into this approach to missile defense was discontinued after the cancellation of the SDI program.

<sup>a</sup>Strategic Defense Initiative, auch *Star-Wars-Programm* genannt, geplanter Abwehrschirm gegen Interkontinentalraketen, vom amerikanischen Präsidenten Ronald Reagan im Jahr 1983 gestartet.

<sup>b</sup>InterContinental Ballistic Missiles.

## 1.4 Linienverbreiterung

Bei der Betrachtung der Drei- und Vier-Niveau-Systeme waren wir von idealisierten Zuständen mit exakt definierten Energien ausgegangen – zumindest was die beiden Laserniveaus anbetrifft. In allen realen Systemen sind alle Energiezustände mehr oder weniger verbreitert. Dies führt auch zu einer Verbreiterung der zugehörigen Laserlinien, Licht wird nicht nur bei einer scharf definierten Frequenz verstärkt, sondern in einem breiteren Frequenzbereich.

Für eine Verbreiterung der Linien sind verschiedene Effekte verantwortlich, man unterscheidet zwischen Mechanismen, die alle Teilsysteme (das können z. B. einzelne Atome sein) gleichartig verbreitern, und solche, die

auf unterschiedliche Teilsysteme unterschiedlich wirken. Erstere bezeichnet man als *homogene*, letztere als *inhomogene* Verbreiterung. Einige dieser Effekte sollen im Folgenden aufgelistet werden.

**Lebensdauer:** Angeregte Zustände haben eine endliche Lebensdauer, die verursachte Verbreiterung – sie gehört zu den homogenen – ist zur Lebensdauer invers (Beweis über Fouriertransformation oder einfach Heisenbergsche Unschärferelation).

**Stöße:** Zusammenstöße zwischen Atomen oder Molekülen in einem Gas, Wechselwirkung mit Phononen, Stöße an Wänden etc. verursachen zufällige Phasensprünge und verkürzen damit die kohärente Wechselwirkung mit der einlaufenden Welle. Auch hier ist die homogene Verbreiterung invers zur mittleren Zeit zwischen zwei Stößen.

**Doppler-Effekt:** Spielt in Gas-Lasern eine Rolle, die thermische Bewegung der Atome oder Moleküle verschiebt die Emissionsfrequenz. Da von dem individuellen Atom oder Molekül abhängig, eine inhomogene Linienverbreiterung.

**Kristallfeld:** Die Energiezustände von Dotierungsatomen in Festkörpern werden durch die lokale Umgebung beeinflusst, das lokale elektrische Feld (Kristallfeld) bewirkt eine Energieverschiebung (Stark-Effekt). Diese inhomogene Linienverbreiterung ist besonders stark ausgeprägt in ungeordneten Festkörpern (Gläser), weniger in Kristallen.

Man kann zeigen, dass die ersten beiden Mechanismen zu einer Lorentzförmig verbreiterten Linienform führen, der Doppler-Effekt zu einer Gaußförmigen. Bei der Verbreiterung durch das Umgebungsfeld hängt die Form von der Verteilung der Inhomogenitäten im konkreten Fall ab.

## 2 Resonator

Zur Verstärkung von Licht reicht ein aktives Medium aus, das bis zur Besetzungsinversion gepumpt ist, für eine stabile Oszillation wird zusätzlich eine Rückkopplung benötigt, der Resonator.

### 2.1 Stabilität eines Resonators

Die Stabilitätsbedingung für Resonatoren sollte sich aus der Überlegung ergeben, dass ein Mode auch nach Vielfachreflexion noch dem anfänglichen Zustand in etwa entspricht. Wir betrachten dazu einen Resonator aus zwei Spiegeln, wie er in Abbildung 4 links dargestellt ist.

Die Transfermatrix  $M$  für einen Umlauf im Resonator (äquivalent dazu Linse  $f_1 \rightarrow$  Weg  $d \rightarrow$  Linse  $f_2 \rightarrow$  Weg  $d$ ) wird aus dem Produkt der Einzelmatri-

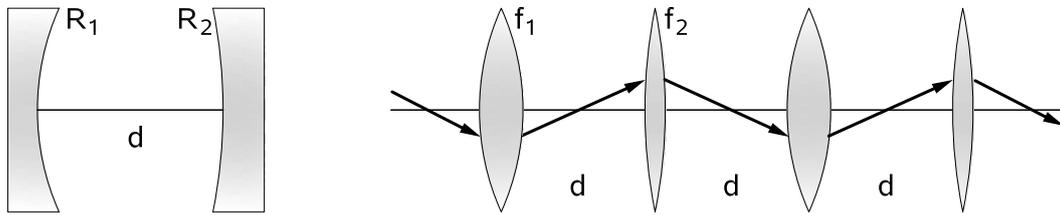


Abbildung 4: Laserresonator aus zwei Spiegeln mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  im Abstand  $d$ . Rechts eine dazu äquivalente Folge aus Linsen.

zen berechnet

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_2} - \frac{2d}{f_1} + \frac{d^2}{f_1 f_2} & 2d - \frac{d^2}{f_2} \\ \frac{d}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Ein passender Lichtstrahl (wir formulieren wegen der Äquivalenz der Matrixbeschreibung im Rahmen der geometrischen Optik) wird durch  $\mathbf{r}$  beschrieben. *Stabil* ist ein Resonator dann, wenn dieser Lichtstrahl auch nach vielen Reflexionen nicht weggelaufen ist, wenn also für nicht zu kleines  $n$  gilt

$$\mathbf{M}^n \mathbf{r} \approx \mathbf{r}. \quad (13)$$

$\mathbf{r}$  können wir als Summe von *Eigenvektoren*  $\mathbf{r}_i$  der Matrix  $\mathbf{M}$  schreiben

$$\mathbf{r} = a_1 \mathbf{r}_1 + a_2 \mathbf{r}_2, \quad (14)$$

für die gilt

$$\mathbf{M} \mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i \quad (15)$$

mit den *Eigenwerten*  $\lambda_i$ .

Ersetzen wir in Gleichung 13 das  $\mathbf{r}$  durch die Eigenvektoren nach Gleichung 14 und verwenden Gleichung 15, erhalten wir eine einfache Bedingung für die Eigenwerte

$$\lambda_i^n \approx 1. \quad (16)$$

Gleichung 15 definiert ein lineares homogenes Gleichungssystem, die Eigenwerte ergeben sich aus der Bedingung, dass für nichttriviale Lösungen die Koeffizientendeterminante gleich Null sein muss

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Für  $\lambda$  ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + AD - BC = 0 . \quad (18)$$

Mit

$$AD - BC = \det(\mathbf{M}) = \det\left(\prod_i \mathbf{M}_i\right) = \prod_i \det(\mathbf{M}_i) = \prod_i 1 = 1 \quad (19)$$

ergeben sich die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1} = \frac{A + D}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{A + D}{2}\right)^2} . \quad (20)$$

Nach Gleichung 16 ist

$$\lambda_{1,2} \approx 1^{\frac{1}{n}} \quad (21)$$

und mit  $1 = \exp(i2\pi m)$  wird

$$\lambda_{1,2} \approx \exp\left(i2\pi \frac{m}{n}\right) = \exp(i\Theta) = \cos \Theta + i \sin \Theta . \quad (22)$$

Der Vergleich mit Gleichung 20 liefert (da  $-1 \leq \cos \Theta \leq 1$ )

$$-1 \leq \frac{A + D}{2} \leq 1 \quad (23)$$

und mit den Werten für  $A$  und  $D$

$$-2 \leq 2 - \frac{2d}{f_2} - \frac{2d}{f_1} + \frac{d^2}{f_1 f_2} \leq 2 \quad (24)$$

oder

$$0 \leq 4 - \frac{2d}{f_2} - \frac{2d}{f_1} + \frac{d^2}{f_1 f_2} \leq 4 . \quad (25)$$

Daraus erhält man

$$0 \leq \left(2 - \frac{d}{f_1}\right) \left(2 - \frac{d}{f_2}\right) \leq 4 \quad (26)$$

und mit  $f = R/2$  schließlich die Stabilitätsbedingung

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1 . \quad (27)$$

Die Klammerausdrücke werden häufig mit  $g$  abgekürzt (g-Parameter)

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 . \quad (28)$$

Die Gleichung 28 definiert Stabilitätsbereiche für Resonatoren im (zweidimensionalen)  $g_1 g_2$ -Raum, die durch die Geraden  $g_1 = 0$  und  $g_2 = 0$  sowie die Hyperbeln  $g_1 g_2 = 1$  begrenzt sind (Abbildung 5).

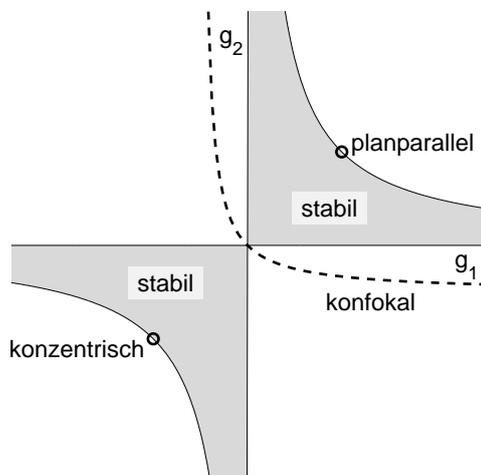


Abbildung 5: Stabilitätsbereiche für Laserresonatoren. Ausgezeichnete Punkte sind gekennzeichnet, planparallel mit  $g_1 = g_2 = 1$ , konzentrisch mit  $g_1 = g_2 = -1$ . Die Hyperbel der konfokalen Resonatoren definiert eine stabile Konfiguration bei  $g_1 = g_2 = 0$ .

Besondere Grenzfälle sind

**Planparalleler Resonator:** Zwei ebene Spiegel,  $R_1 = R_2 = \infty$ ,  $g_1 = g_2 = 1$ .

**Konzentrischer Resonator:** Zwei sphärische Spiegel, in der Abbildung eingezeichnet mit  $R_1 = R_2 = d/2$ ,  $g_1 = g_2 = -1$ .

Allgemeinerer Fall  $R_1 + R_2 = d$ .

**Konfokaler Resonator:** Zwei sphärische Spiegel,  $R_1 + R_2 = 2d$ ,  
 $(2g_1 - 1)(2g_2 - 1) = 1$ .

Allgemein gilt, dass Resonatoren an den Stabilitätsgrenzen relativ kritisch zu justieren sind, daher verwendet man meist Resonatoren, die im Innern der Stabilitätsbereiche liegen.

## 2.2 Longitudinale Moden

Durch den Resonator wird festgelegt, welche Frequenzen in einem Laser anschwingen können. Aus der Bedingung, dass sich die Wellenzüge aufeinander folgender Umläufe im Resonator konstruktiv überlagern, folgt für Wellenlänge  $\lambda(m)$  und Frequenz  $\nu(m)$

$$\lambda(m) = \frac{2d}{m} \quad \text{und} \quad \nu(m) = m \frac{c}{2d} \quad (29)$$

mit  $c$ : Lichtgeschwindigkeit,  $d$ : Resonatorlänge,  $m$ : ganzzahliger Moden-Index.

Der Frequenzabstand benachbarter longitudinaler Moden ist danach

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d} . \quad (30)$$

Der Einfluss transversaler Modenstrukturierung ist hier vernachlässigt, streng genommen gelten die obigen Formeln nur für den Fall einer ebe-

nen Welle oder eines idealen Gauß-Mode im planparallelen Resonator. Für andere Resonatoren und insbesondere auch für höhere transversale Moden ergeben sich leichte Verschiebungen. Weiterhin ist zu beachten, dass mit  $d$  die *optische* Länge des Resonators gemeint ist, also die mit dem Brechungsindexverlauf im Resonator gewichtete geometrische Länge.

### 2.3 Verstärkung und Verluste

Licht wird in Materialien jeglicher Art meist absorbiert, die Absorption, d. h. die Abnahme der spektralen Energiedichte  $\rho(\nu)$  pro durchlaufener Strecke, ist proportional zur Dichte der absorbierenden Systeme (Atome, Moleküle) multipliziert mit einem frequenzabhängigen Wirkungsquerschnitt. Die beiden Größen werden meist zum frequenzabhängigen Absorptionskoeffizienten  $\alpha(\nu)$  zusammengefasst. Damit wird

$$\frac{d\rho(\nu, z)}{dz} = -\alpha(\nu)\rho(\nu, z) \quad \text{oder} \quad \rho(\nu, z) = \rho(\nu, 0) \exp(-\alpha(\nu)z) . \quad (31)$$

Sind eine merkliche Anzahl der beteiligten Systeme im angeregten Zustand, beim Laser im oberen Laserniveau, kommt zur Absorption die stimulierte Emission. Überwiegt die stimulierte Emission, dann verstärkt das Medium statt zu absorbieren. Ausführlicher formuliert, wird die Änderung der Energiedichte

$$\frac{d\rho(\nu, z)}{dz} = (N_2 - N_1)f(\nu)B\frac{h\nu}{c}\rho(\nu, z) . \quad (32)$$

$B$  ist der zuständige Einstein-Koeffizient,  $f$  eine Funktion, die den spektralen Verlauf des Wirkungsquerschnitts beschreibt,  $h$  und  $c$  die üblichen Konstanten.

Die Verstärkung ( $N_2 > N_1$ ) oder Absorption ( $N_2 < N_1$ ) nach einmaligem Durchlaufen eines aktiven Mediums der Länge  $L$  wird dann

$$\frac{\rho(\nu, L)}{\rho(\nu, 0)} = \exp\left((N_2 - N_1)f(\nu)B\frac{h\nu}{c}L\right) . \quad (33)$$

Dieser Verstärkung stehen Verluste gegenüber – Absorption im Resonator, Beugungsverluste (auch beim idealen Gauß-Mode), endliche Spiegelreflexion (am Auskoppelspiegel will man auch ein wenig Leistung entnehmen). Die Verluste sind in guter Näherung im betrachteten Spektralbereich frequenzunabhängig. Um Laseraktion zu erreichen, muss die Verstärkung die Verluste überwiegen, das legt die Mindestanforderung für die Differenz der Besetzungszahlen fest.

Im Resonator werden dann von den möglichen Moden nur die verstärkt, bei denen die Verstärkung die Verluste überwiegt. Die Verhältnisse sind in Abbildung 6 skizziert.

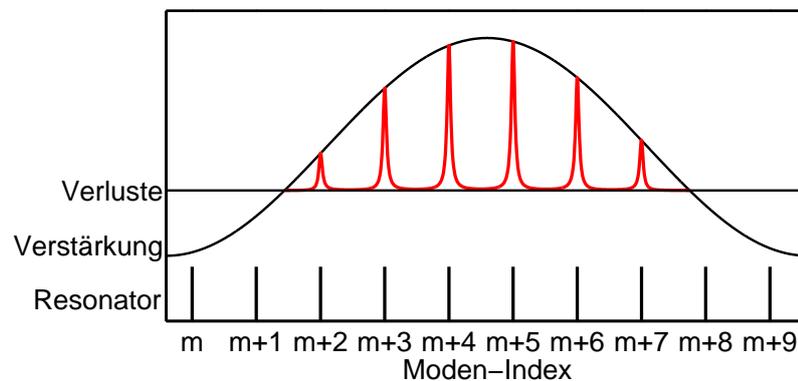


Abbildung 6: Schematischer Verlauf der Verstärkung und Verluste im Resonator. Von den im Resonator möglichen Moden bilden sich nur die im Spektralbereich überwiegender Verstärkung aus. Die den Moden-Indizes entsprechenden Frequenzen sind durch Gleichung 29, die Modenabstände durch Gleichung 30 definiert.

Im Idealfall des stationären Betriebs sollte im Laser nur der Mode mit der höchsten Verstärkung übrig bleiben, der Laser mithin sehr schmalbandig arbeiten. Dass dies im Realfall nicht so ist, hat mehrere Gründe:

- Bei inhomogen verbreiterten Laserlinien bewirkt der gerade aktive Mode, dass die für diese *Frequenz* passenden Systeme ihre Inversion besonders schnell verlieren. Dann wird dieser Mode aussterben, andere Moden werden anschwingen. Man bezeichnet das als *Spectral Hole Burning*.
- Auch bei homogen verbreiterten Linien kann der schwingende Mode bewirken, dass die Inversion an bestimmten *Orten* im aktiven Medium bevorzugt abgebaut wird (an den Amplitudenmaxima der stehenden Welle). Dies finden Sie in der Literatur unter *Spatial Hole Burning*.

Die beiden Effekte führen dazu, dass im Allgemeinen im Laser die Modenstruktur zeitlich nicht stabil ist, wie das die Abbildung 6 suggeriert, sondern die Moden sich gegenseitig ablösen. Fast alle von der Verstärkung her möglichen Moden schwingen unkorreliert und konkurrierend. In Abbildung 7 ist gezeigt, wie sich das auf das Zeitverhalten der Laseramplitude auswirkt. In der Simulation sind 10 bzw. 50 Moden mit zufälliger Phasenbeziehung addiert.

Da man meist nur an einer mittleren Laserleistung interessiert ist, die über Zeitskalen konstant ist, die groß gegen die Resonatordurchlaufzeit sind (bei einer Resonatorlänge von 30 cm ist das 1 ns), spielen die konkurrierenden Moden für sehr viele Anwendungen keine große Rolle.

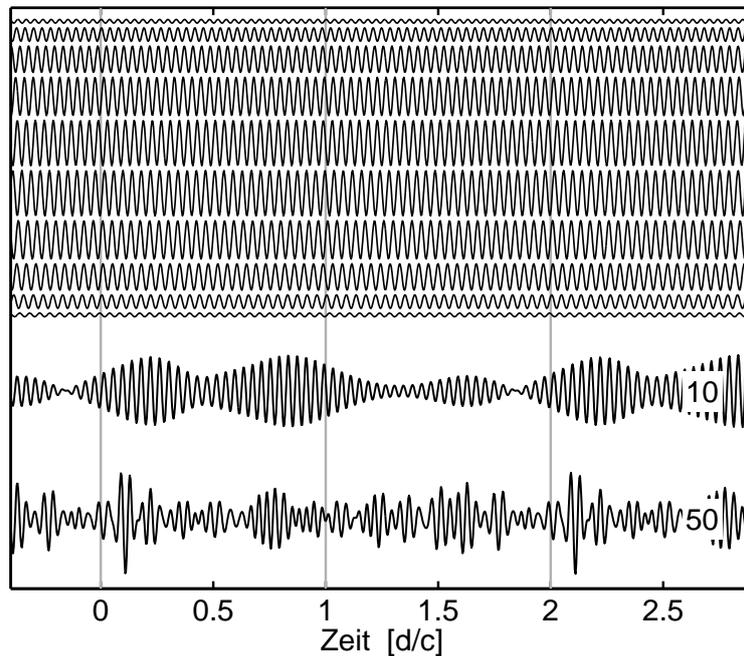


Abbildung 7: Zeitverhalten der Laseramplitude bei mehreren unkorrelierten Moden. Oben 10 Lasermoden, darunter deren Summe und zum Vergleich die Summe aus 50 unkorrelierten Moden (Zeitskala in Vielfachen des Quotienten aus Resonatorlänge und Lichtgeschwindigkeit, d. h. in Vielfachen der Resonatordurchlaufzeit).

Durch geeignete Modifikationen des Resonators kann man aber auch das unkorrelierte Modenverhalten unterdrücken und in einen geordneteren Betrieb überführen.

## 2.4 Einzelmode-Betrieb

Wünschenswert ist bisweilen, dass ein Laser mit einer sehr konstanten Frequenz und sehr schmalbandig arbeitet, das benötigt man beispielsweise bei der Brillouin-Spektroskopie und bei vielen hochgenauen Messverfahren. Naheliegend ist es dann, dafür zu sorgen, dass im Laser nur noch ein einzelner Mode mit einer sehr gut festgelegten Frequenz schwingt und andere Moden weitestgehend unterdrückt werden.

Wie aus Gleichung 30 ersichtlich ist, sind die Modenabstände im Resonator umgekehrt proportional zur Resonatorlänge  $d$ . Man braucht mithin nur den Resonator so kurz zu machen, dass nur noch ein Resonatormode in das Verstärkungsprofil des aktiven Mediums fällt und hat damit Einzelmode-Verhalten erzwungen. Das Verfahren funktioniert bei wenigen

Lasertypen, insbesondere bei Typen mit schmalen Verstärkungsprofilen. Ein Beispiel sind HeNe-Laser, bei denen die kritische Resonatorlänge bei etwa 18 cm liegt. Nachteil ist immer die durch die kurze Resonatorlänge auch bedingte geringe Leistung der Laser.

Häufiger verwendet werden zusätzliche frequenzselektive Elemente im Resonator, um Einzelmode-Verhalten zu erreichen. Diese zusätzlichen Frequenzselektoren müssen bei der Frequenz des gewünschten Mode möglichst zu 100 % transparent sein, bei den unerwünschten Frequenzen dagegen weniger transparent. Da diese Elemente im Resonator sehr oft durchlaufen werden, potenziert sich die Wirkung des Transmissionsverhalten und es reichen geringe Abweichungen von der optimalen Transmission aus, um Nebenmoden effizient zu unterdrücken.

Ein Beispiel für solche zusätzlichen frequenzselektiven Elemente sind planparallele Glas- oder Quarzplatten, die teildurchlässig verspiegelt sind (*Fabry-Perot-Plättchen, Etalons*). Der Strahlengang in einer derartigen Planplatte ist in Abbildung 8 links dargestellt. Lichtstrahlen werden an Ein- und Aus-

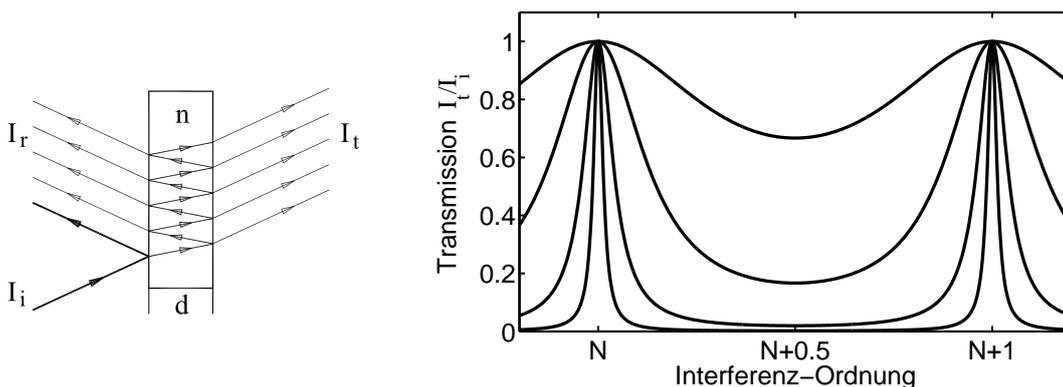


Abbildung 8: Strahlengang an einem Fabry-Perot-Plättchen (Etalon) der optischen Dicke  $n \cdot d$  (links). Rechts die Transmissionsfunktion, Transmission als Funktion der Interferenzordnung, für unterschiedlich reflektierende Beschichtungen.

trittsfläche teilreflektiert, die Amplituden der einzelnen Teilbündel addieren sich, interferieren. Die mathematische Formulierung für die Transmissions- und Reflexionsfunktion solcher planparalleler Platten finden Sie in Lehrbüchern zur Optik (z. B. Born, Wolf: *Principles of Optics*). Das Ergebnis für die Transmission ist in Abbildung 8 rechts skizziert. Unabhängig vom Reflexionsgrad der Beschichtung ist die Transmission 100 % bei ganzzahliger Interferenzordnung, d. h. dann, wenn die Wegdifferenz zwischen benachbarten Teilstrahlen gerade  $N\lambda$  ist. Aus der Geometrie ist ersichtlich, dass diese Weglängendifferenz vom Kippwinkel abhängt, über diesen lässt sich das Etalon abstimmen.

## 2.5 Modenkopplung

Statt Einzelmode-Verhalten zu erzwingen, kann man die Modenvielfalt ausnutzen, um kurze Pulse mit einem Laser zu generieren. Dazu muss man eine feste Phasenbeziehung zwischen allen beteiligten Moden erzwingen. Abbildung 9 zeigt eine Modellrechnung dazu. Es werden die gleichen Moden wie in Abbildung 7 addiert, diesmal jedoch mit der Bedingung, dass zum Zeitpunkt 0 alle gleichphasig schwingen.

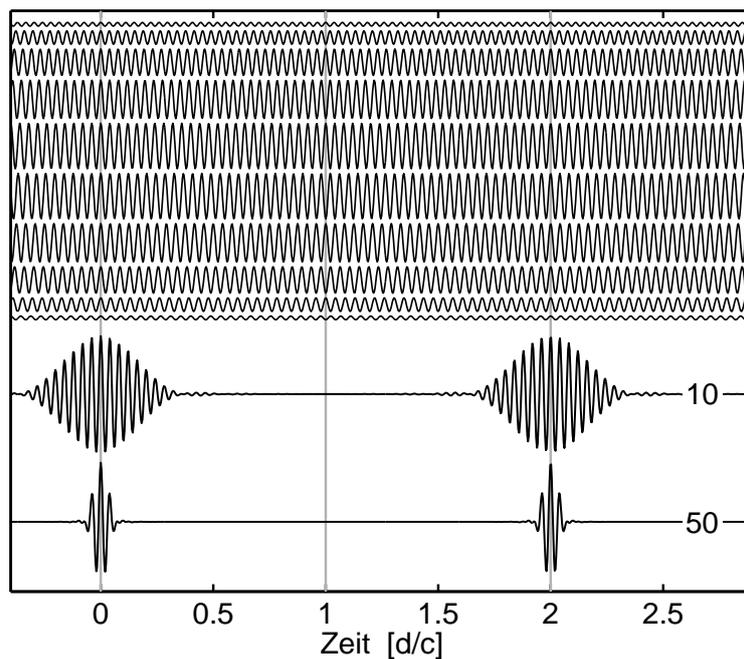


Abbildung 9: Zeitverhalten der Laseramplitude bei mehreren *phasenrichtig* gekoppelten Moden. Oben 10 Lasermoden, die zum Zeitpunkt 0 alle gleichphasig schwingen, darunter deren Summe und darunter die Summe für 50 solcher Moden.

Statt des mehr oder weniger statistischen Amplitudenverhaltens der Abbildung 7 ergeben sich als Summenamplituden regelmäßige kurze Pulse. Der zeitliche Abstand der Pulse ist gleich der Laufzeit für die doppelte Resonatorlänge (bei einer Resonatorlänge von 30 cm wäre der Pulsabstand 2 ns). Nach Gleichung 30 ist das das Inverse des Frequenzabstandes benachbarter Moden. Die Pulslänge ist in etwa gleich dem Pulsabstand dividiert durch die Zahl der beteiligten Moden. Das Produkt aus Frequenzbandbreite (Breite des Verstärkungsprofils) und der Pulslänge ist etwa<sup>6</sup> 1.

<sup>6</sup>Der genaue Wert ist abhängig von der Form des Verstärkungsprofils und von den Definitionen für Bandbreite und Pulslänge (Halbwertsbreite, volle Breite,  $1/e$  etc.).

Durch die Phasenkopplung der Lasermoden hat man somit eine sehr gute Möglichkeit, kurze Laserimpulse zu erzeugen. Die Pulslänge und die Bandbreite sind invers zueinander (wieder mal Heisenbergsche Unschärferelation oder Fourier-Transformation). Das hat weit reichende Folgerungen: Um möglichst kurze Laserimpulse zu erzeugen, d. h. um eine möglichst gute Zeitauflösung zu erreichen, benötigt man Laser, die ein sehr breites Verstärkungsprofil mit möglichst vielen Moden aufweisen. Diese Anforderung ist völlig konträr zu den üblichen Erwartungen, ein Laser möge möglichst schmalbandig sein.

Konkret wird die Phasenkopplung der Moden dadurch realisiert, dass die Resonatorrückkopplung moduliert wird. Das muss sehr genau mit der Durchlaufzeit für die doppelte Resonatorlänge synchronisiert werden. Die Modulation kann durch elektrooptische, akustooptische oder andere Modulatoren erfolgen. Bei *elektrooptischen* Modulatoren verändert eine angelegte Spannung die Polarisationsrichtung des Lichts, in Kombination mit einem Polarisator kann man die Resonatorgüte beeinflussen. In *akustooptischen* Modulatoren wird die Lichtwelle durch eine akustische Welle in ihrer Richtung abgelenkt, bei abgeschalteter akustischer Welle wird die Rückkopplung optimal. Die Modulatoren werden so angesteuert, dass sie die gewünschten Impulse ungeschwächt passieren lassen, das führt automatisch zur notwendigen Phasenkopplung.

Durch die Modenkopplung erhält man eine Folge kurzer Laserimpulse, deren zeitlicher Abstand bei üblichen Resonatoren im Nanosekundenbereich liegt. Hat man es in einer Anwendung mit Zeiten zu tun, die größer sind, ist diese relativ schnelle Pulsfolge unerwünscht. Durch ein zusätzliches schaltbares Ablenkelement im Resonator kann man erreichen, dass nicht alle Impulse, sondern gezielt einzelne aus dem Resonator ausgekoppelt werden. Näheres dazu finden Sie im Netz unter dem Stichwort *Cavity Dumping*.

## 2.6 Resonatorgüte

Bei Schwingkreisen ist es üblich, Gütefaktoren zu definieren, die davon abhängen, wie groß die ohmschen Anteile an den komplexen Widerständen sind. Je kleiner die ohmschen Verluste, umso größer ist der Gütefaktor  $Q$ . Allgemein wird der  $Q$ -Faktor definiert als

$$Q = \omega \frac{\text{Gespeicherte Energie}}{\text{Abgegebene Leistung}} \quad (34)$$

Diese Definition lässt sich direkt auf den Laser-Resonator übertragen, in das Verhältnis aus abgegebener Leistung und gespeicherter Energie gehen die Spiegelreflektivitäten, Absorptions-, Beugungs- und weitere Verluste im Resonator sowie ganz allgemein die (De-)Justage des Resonators ein.

Wie bei Schwingkreisen durch die Breite der Resonanzkurve kann man auch beim Laser  $Q$  durch die Linienbreite (Halbwertsbreite) eines Lasermode ausdrücken

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} . \quad (35)$$

Grünes Licht (500 nm) hat eine Frequenz von  $6 \cdot 10^{14}$  Hz, übliche Linienbreiten liegen im MHz- bis GHz-Bereich. Die zugehörigen  $Q$ -Faktoren können Sie berechnen.

## 2.7 Güteschaltung

Wenn man einen Resonator so weit dejustiert, dass kein Lasermode anschwingen kann, dass mithin der  $Q$ -Faktor sehr klein wird (keine gespeicherte Energie im Resonator), wird beim Pumpen des aktiven Mediums die Inversion stark überhöht. Stellt man dann schnell genug auf sehr gute Justage um (hoher  $Q$ -Faktor), wird der Laser mit sehr hoher Verstärkung und hoher Leistung anschwingen, bis die Inversion auf den Normalzustand zurück gegangen ist. Man nutzt dieses als *Güteschaltung* oder *Q-Switching* bezeichnete Verfahren, um Laserimpulse sehr hoher Leistung zu erzeugen. Gegenüber dem kontinuierlichen Betrieb eines Lasers erreicht man kurzzeitig Leistungen, die um den Faktor  $10^3$  bis  $10^6$  höher sind. Die Leistungserhöhung ist physikalisch dadurch begrenzt, dass die Inversion durch spontane Emission abgebaut wird. Es macht mithin keinen Sinn, beliebig lange zu pumpen, bevor man die Leistung abrufen. Zeiten, die die Zeitkonstante für spontane Emission  $\tau_{21}$  deutlich übersteigen, bringen keinen Gewinn mehr.

Das Umschalten des Resonators besorgen *Güteschalter*, *Q-Switches*. Das können *passive* Elemente sein oder geeignete *aktive*.

**Passive Güteschalter:** Manche absorbierenden Substanzen, *sättigbare Absorber*, werden bei intensiver Lichteinstrahlung für dieses Licht durchlässig. Dann nämlich, wenn alle für die Absorption zuständigen Elektronen in einen anderen – langlebigen – Zustand angeregt, *gepumpt* sind. Baut man solche Substanzen in geeigneter Weise im Resonator ein, wird dessen  $Q$ -Faktor niedrig sein, bis der Absorber gesättigt ist, dann auf hohes  $Q$  schalten. Die hohe Leistung sorgt dann dafür, dass der Absorber so lange gesättigt bleibt, bis die Inversion im aktiven Medium weit genug abgebaut ist.

**Aktive Güteschalter:** Wie bei der Modenkopplung kann man auch zum Schalten der Resonatorgüte akustooptische oder elektrooptische Modulatoren verwenden. Beim akustooptischen Modulator (s. u.) sorgt man durch eine hochfrequente Schallwelle dafür, dass das Laserlicht so abgelenkt wird, dass keine sinnvolle Rückreflexion zustande kommt. Schaltet man

die Schallwelle ab, arbeitet der Resonator wieder normal mit hoher Güte. Elektrooptische Modulatoren drehen die Polarisierung um einen ungünstigen Winkel, durch Anlegen einer Spannung schaltet man auf einen günstigen Winkel. Wenig verwendet aber sehr anschaulich sind mechanische Modulatoren: Ein rotierender Spiegel lässt den Laser gerade dann aufblitzen, wenn er exakt senkrecht zum Strahl steht, eine rotierende Lochscheibe im Resonator schaltet die Güte sehr effektiv, indem sie den Strahl abwechselnd durchlässt oder unterbricht.

Aktive Güteschalter, insbesondere akustooptische oder elektrooptische Modulatoren, lassen sich sehr gut elektrisch ansteuern. Damit lassen sich Pulsfrequenz und Zeitverhalten sehr definiert steuern. Dagegen sind passive Güteschalter nur wenig beeinflussbar. Ihr Schaltverhalten hängt von der Pumpleistung ab, höhere Pumpleistung führt zu rascherer Pulsfolge. Aus den genannten Gründen werden als Güteschalter fast nur akustooptische oder elektrooptische Modulatoren eingesetzt.

**Akustooptischer Modulator:** Die prinzipielle Funktionsweise eines akustooptischen Modulators veranschaulicht Abbildung 10. Ein Schallsender (meist ein Piezo-Transducer) sendet eine hochfrequente Schallwelle in das Modulormaterial (Glas, Quarz). Dadurch wird die Dichte und damit der Brechungsindex des Materials moduliert. Frequenz und Winkel werden so eingestellt, dass für den Laserstrahl die *Bragg*-Bedingung erfüllt ist, dann wird ein relativ großer Anteil des Lichts abgelenkt. Sobald man die Schallwelle abschaltet, läuft das Licht wieder ungestört.

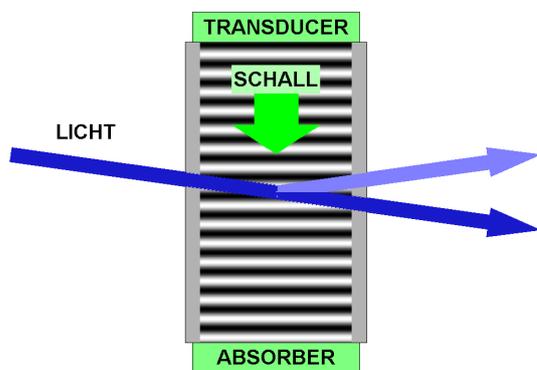


Abbildung 10: Funktionsweise eines akustooptischen Modulators: Eine Schallwelle moduliert die Dichte und damit den Brechungsindex, Licht wird am Brechungsindexgitter abgelenkt, wenn die Bragg-Bedingung erfüllt ist.

Die dargestellte Bauform mit einer laufenden Schallwelle lässt sich schnell schalten, Bauformen mit resonanten stehenden Schallwellen sind in der Ablenkung effizienter, da größere Schallamplituden möglich sind, schalten aber deutlich langsamer.